Aufgabe 1

Es seien $A, B, C \in \Omega$. Beweisen Sie die Gültigkeit der Distributivgesetze

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{und} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aufgabe 2

Für je zwei Mengen A und B heißt

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

die *symmetrische Differenz* von A und B. Man beweise folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
A \triangle B &= B \triangle A && (1)\\
(A \triangle B) \triangle C &= A \triangle (B \triangle C) && (2)\\
A \triangle A &= \emptyset; \qquad A \triangle \emptyset = A && (3)\\
A^C \triangle B^C &= A \triangle B && (4)\\
(A \triangle B) \cap C &= (A \cap C) \triangle (B \cap C) && (5)\\
\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \triangle B) && (6)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{A}_n$ die von System $\mathcal{E}$ der Mengen $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$ und $\Omega := \mathbb{N}$ erzeugte σ-Algebra. Man zeige, dass $\mathcal{A}_n$ aus allen Mengen $A \subset \mathbb{N}$ besteht, welche entweder $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ oder $m \in A$ für alle $m \geq n+1$ erfüllen. Man zeige, dass $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ ist.

Aufgabe 4

Man beweise folgenden Satz:

Satz 2.11 ((Durchschnitt von σ-Algebren)) *Sei Ω eine Menge, sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf Ω. Dann ist auch*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i := \{A \subset \Omega | A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I\}$$

eine σ-Algebra auf Ω.