1 Anmerkungen zum Itô-Integral

Man betrachte ein Spielsystem, wie es in 12.2.2 definiert wurde, jedoch mit einigen Spezifikationen (und modifizierter Notation):
Vorausgesetzt ist eine Folge von *iid* Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\{-1,+1\}$ und $P(X_t=-1)=\frac{1}{2}=P(X_t=1)$; insbesondere ist dann $\mathbb{E}(X_t)=0$.
(X_t) ist als Folge fairer Siele zu interpretieren, beispielsweise faire Münzwürfe.
Betrachtet man

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$$

so ist S_n ein Martingal und in der Theorie der Stochastischen Prozesse als einfache symmetrische Irrfahrt bekannt.
Ferner sei W_t der Einsatz im Spiel t, der aufgrund des Ergebnisverlaufs bis incl. $t-1$ festgesetzt werden kann, d.h.: W_t ist $\sigma(X_1,...,X_{t-1})$ - messbar (und somit $\sigma(S_1,...,S_{t-1})$ - messbar). Hiermit kann iterativ definiert werden:

$$G_1 = W_1 X_1$$

$$G_{t+1} = G_t + W_{t+1}X_{t+1}$$

G_t ist der kumulierte Gewinn, der bis zum t-ten Spiel erzielt wurde.
Schreibt man G_t etwas um zu

$$G_t = \sum_{k=1}^{t} W_k(S_k - S_{k-1})$$

so zeigt sich eine gewisse Ähnlichkeit zu den definierenden Summen des Riemann-Stieltjes-Integral. Dies wird deutlich, wenn man die involvierten Stochastischen Prozesse bei einem ω auswertet:

$$G_t(\omega) = \sum_{k=1}^{t} W_k(\omega)(S_k(\omega) - S_{k-1}(\omega))$$

Man notiert auch an Stelle von G_t

$$(W \bullet S)_n.$$

Ziel ist es nun, die Situation für „stetige Zeit“ zu verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung führt dann zum Itô-Integral.
Die direkte Verallgemeinerung der einfachen symmetrischen Irrfahrt führt zur *Brownschen Bewegung*; auch diese ist ein Martingal, in Zeichen $(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$, und einem stochastischen Prozess in stetiger Zeit (nun $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$). Dies kann dahingehend interpretiert werden, dass zu jedem Zeitpunkt ein Spielergebnis eintritt und zu jedem Zeitpunkt t, in Abhängigkeit von der Vergangenheit bis zum Zeitpunkt t, ein „Einsatz“ festgesetzt werden kann. D.h., dass $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ zumindest der durch das Martingal $(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ erzeugten Filtration adaptiert ist. Tatsächlich wird etwas mehr gefordert: $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ soll noch beschränkt und stückweise stetig sein. Das Itô-Integral soll dann bei diesem „stetigen“ Spielsystem den Gewinn bis zu einem Zeitpunkt T angeben. In Zeichen:

$$I(W) = \int_0^T W_t \, dB_t.$$

Die Frage ist nun, wie sich ein solches „Integral“ definieren lässt. Eine erste, allerdings nicht zielführende Weise wäre, das Integral als Zufallsvariable zu definieren, die jedem ω das entsprechende Riemann-Stieltjes-Integral zuordnet – man spricht hierbei auch von „pfadweiser Definition“:

$$I(W)(\omega) = \int_0^T W_t(\omega) \, dB_t(\omega).$$

Man beachte, dass für „festes“ ω $W_t(\omega)$ und $B_t(\omega)$ Funktionen in der Variablen t sind.
Es ist bekannt, dass das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^T f dg$ für stetige Integranden (f) und für Integratoren (g) von beschränkter Totalvariation existiert. Wenn nun, zumindest für P-f.a. ω $W_t(\omega)$ stetig und $B_t(\omega)$ von beschränkter Totalvariation wäre, gäbe es im Grundsatz kein Problem. Es gilt aber folgende Satz:

Satz 1.1 *Die Pfade der Brownschen Bewegegung, $(B_t(\omega))_{t\in\mathbb{R}}$ haben fast sicher unendliche Totalvariation, d.h.:*
Sei $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen mit $\|\pi_n\| \to 0$, dann gibt es eine Nullmenge N, so dass für alle $\omega \in N^C$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\pi_n} |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| = \infty$$

Es gilt ferner:

Satz 1.2 *Sei $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ eine Funktion von unbeschränkter Totalvariation, dann gibt es eine stetige und beschränkte Funktion $f : [0,T] \to \mathbb{R}$, so dass das Riemann-Stieltjes-Integral*

$$\int_0^T f \, dg$$

nicht existiert.

Das bedeutet, dass unter obiger Definitionsweise für die Brownsche Bewegung nicht einmal stetige und beschränkte Funktionen geeignete Integranden wären. Es gilt also den Integral-Begriff etwas anders zu definieren.
Dies sei nachstehend skizziert.

1.1 Skizze der Definition

Generell vorausgesetzt ist eine Brownsche Bewegung $(B_t)_{0\leq t\leq T}$, kurz B, (definiert auf einem beschränkten Zeitraum $[0,T]$, T fix) auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, versehen mit der natürlichen von B erzeugten Filtration $\mathbb{B}$.
Mit $\mathcal{L}_0^2([0,T])$ sei die Menge aller $\mathbb{B}$ - adaptierten stochastischen Prozesse $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_0}$ mit

$$\int_\Omega \int_0^T X_t^2(\omega)\, dt dP = \mathbb{E}_P \left(\int_0^T X_t^2(\omega)\, dt \right) < \infty$$

bezeichnet. $\mathcal{L}_0^2([0,T])$ ist ein Vektorraum, genauer: ein Untervektorraum aller bezüglich $P \otimes \lambda$ quadrat-integrierbarer Funktionen.
Mit $\mathcal{L}_{0,c}^2([0,T])$ sei der Vektorunterraum von $\mathcal{L}_0^2([0,T])$ bezeichnet, der aus allen Funktionen der Gestalt

$$E_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

besteht. Hierbei ist $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ eine Zerlegung von $[0,T]$. Für jedes ω ist $E_t(\omega)$ (kurz: E) eine stückweise konstante Funktion. Man nennt diese Funktionen auch (wieder) einfache oder elementare Funktionen.
Für diese einfachen Funktionen lässt sich das elementare Itô-Integral explizit für alle $E \in \mathcal{L}_{0,c}^2([0,T])$ definieren:

$$I(E) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Dies ist eine zufällige Größe.

Zum Itô-Integral für alle $X \in \mathcal{L}_0^2([0,T])$, für alle $\mathbb{B}$ - adaptierten stochastischen Prozesse $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0}$, kurz: X kommt man durch folgenden Zusammenhang:
Für jedes $X \in \mathcal{L}_0^2([0,T])$ gibt es eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{L}_{0,c}^2([0,T])$ (von einfachen Funktionen), welche bezüglich der quadratischen Konvergenz gegen X konvergiert (genannt: X approximierende Folge):

$$\int_0^T (X - E_n)^2 \, d(P \otimes \lambda) \longrightarrow 0$$

Hiermit definiert man

$$I(X) = \lim_{n \to \infty} I(E_n).$$

Dies ist wohl definiert, denn

- $I(E_n)$ konvergiert für jede X approximierende Folge.
- Für jede X approximierende Folge konvergiert $I(E_n)$ gegen den gleichen Wert.

Zwischenruf Warum sollte dies ein vernünftiger Integralbegriff sein?