## Test auf den Erwartungswert

- Wir interessieren uns für den Erwartungswert $\mu$ einer metrischen Zufallsgröße.
  Beispiele: Alter, Einkommen, Körpergröße, Scorewert ...
- Wir können einseitige oder zweiseitige Hypothesen formulieren.
- Beispiele
  - "Vor 10 Jahren betrug die Durchschnittsgröße von Studienanfängern und -anfängerinnen 167 cm. Heute sind sie im Schnitt größer als 167 cm."
  - Die Differenz zwischen Gewicht vor und nach einer Diät ist 0.



## Zweiseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert $\mu$

- $X$ Zufallsgröße mit Erwartungwert $\mu$.
- Zweiseitige Hypothese über $\mu$:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

- Testgröße: Mittelwert in der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Stichprobenumfang $n$ ist genügend groß (Faustregel $n > 30$)



## Zweiseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert $\mu$

Hypothesen: $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$

**Testentscheidung zum Signifikanzniveau $\alpha$**

Annahmebereich

$$\mu_0 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

mit

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

$H_0$ wird abgelehnt, falls

$$\overline{X} < \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^2}{n}} \quad \text{oder} \quad \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ist das $(1-\alpha/2)$-Quantil der Standardnormalverteilung.



## Zweiseitiger Gauss-Test: p–Wert

Der p-Wert ergibt sich zu :

$$2 \cdot \left[ 1 - \Phi \left( |\overline{X} - \mu_0| / \sqrt{\frac{S^2}{n}} \right) \right]$$

$\Phi$ ist die Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung

$$(\overline{X} - \mu_0) / \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

wird als t-Wert (oder z-Wert) bezeichnet.

## Beispiel: Verändert sich der Blutdruck nach einer Intervention

Beispiel zweiseitiger Test

- Nullhypothese: Die Blutdruckdifferenz ist 0.

$$H_0 \quad : \quad \mu = 0$$
$$H_1 \quad : \quad \mu \neq 0$$

- Testgröße: Durchschnittlicher Bluddruck
- Faustregel $n = 62 > 30$ ist erfüllt
  $\longrightarrow$ zweiseitiger Gauß-Test
- Falls wir annehmen, dass die Blutdruckdifferenz normalverteilt ist, können wir auch den zweiseitigen $t$-Test anwenden. (Standardeinstellung in SPSS)



## Dualität Test und Konfidenzintervall

- Annahmebereich: Wir behalten $H_0$ bei, falls die Testgröße $T$ in der Nähe von $\mu_0$ liegt:
- Äquivalente Formulierung über ein Konfidenzintervall: Wir behalten $H_0$ bei, falls $\mu_0$ in der Nähe der Testgröße liegt
- Wir behalten $H_0$ bei, falls $\mu_0$ im Konfidenzintervall für die Differenz liegt
- Dabei hängen das Konfindenzniveau $\gamma$ und das Signifikanzniveau $\alpha$ wie folgt zusammen:
  $1 - \alpha = \gamma$
- Dies gilt sehr allgemein für zweiseitige Test und Konfidenzintervalle
- Dies Prinzip kann zur Konstruktion von Konfidenzintervallen verwendet werden



## Einseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert $\mu$

- $X$ Zufallsgröße mit Erwartungwert $\mu$.
- Einseitige Hypothese über $\mu$:

$$H_0 \quad : \quad \mu \leq \mu_0$$
$$H_1 \quad : \quad \mu > \mu_0$$

- Testgröße: Mittelwert in der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Stichprobenumfang $n$ ist genügend groß (Faustregel $n > 30$)



## Einseitiger Gauss-Test auf den Erwartungswert $\mu$

Hypothesen: $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$

**Testentscheidung zum Signifikanzniveau $\alpha$**

Annahmebereich

$$\overline{X} \leq \mu_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

$H_0$ wird abgelehnt, falls

$$\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

$z_{1-\alpha}$ ist das $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung.

# Ein- bzw. zweiseitiger t-Test auf den Erwartungswert

Was tun wir, falls die Faustregel $n > 30$ nicht erfüllt ist?

**Zusätzliche Voraussetzung**

- Zufallsgröße $X$ ist normalverteilt.

Wir stellen keine Bedingung an die Stichprobengröße $n$.

**t-Test**

- Der einseitige bzw. der zweiseitige t-Test auf den Erwartungswert $\mu$ hat die gleiche Form wie der einseitige bzw. zweiseitige Gauss-Test.
- Der $t$-Test unterscheidet sich vom Gauss-Test dadurch, dass wir das Quantil $z$ der Standardnormalverteilung durch das Quantil $t$ der $t$-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden ersetzen.



# Verbundene und unverbundene Stichprobe

**Verbundene, abhängige Stichprobe**

Zwei Stichproben heißen verbunden, falls an einem Merkmalsträger (z.B. einer Person) zwei vergleichbare Merkmale erhoben werden.
Man nennt verbundene Stichproben oft auch abhängige Stichproben.

**Beispiel:** Das Ziel einer medizinischen Studie ist es, die Wirkung eines cholesterin-senkenden Medikaments zu überprüfen.

- Unterteilung der Probanden und Probandinnen in 2 Gruppen:
  1 Gruppe erhält das Medikament, 1 Gruppe erhält ein Placebo.
  unverbundene Stichprobe
- Alle Probanden und Probandinnen erhalten das Medikament. Von allen Personen wird der Cholesterinspiegel am Anfang und am Ende der Studie erhoben.
  verbundene Stichprobe



# Approximativer Test auf Erwartungswert-Differenz bei unabhängigen Stichproben

**Voraussetzungen:**

- $X$ und $Y$ sind zwei Größen mit Erwartungswerten $\mu_X$ und $\mu_Y$
- $X_1, \ldots, X_m$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ **unabhängige** Stichproben
- Testgröße: standardisierte Differenz der Mittelwerte

$$\begin{aligned} T &= \overline{X} - \overline{Y} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \end{aligned}$$

- Faustregel: Stichprobenumfänge $m, n > 30$



# Differenz von Erwartungswerten bei unabhängigen Stichproben

**Annahmebereich**

Für die beiden einseitigen Tests und den zweiseitigen Test auf die Differenz

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = d_0 \qquad H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq d_0 \qquad H_0 : \mu_X - \mu_Y \geq d_0$$
$$H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq d_0 \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > d_0 \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y < d_0$$

ist der Annahmebereich

$$d_0 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s \qquad ]-\infty, d_0 + z_{1-\alpha} \cdot s] \qquad [d_0 - z_{1-\alpha} \cdot s, \infty[$$

mit

$$s = \sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}}$$

## Beispiel: Radio-Hördauer Ost-West

- Hören Personen in den alten Bundesländern im Schnitt mehr Radio?
  $X$ : Hördauer im den alten Bundesländern,
  $Y$: Radiodauer in den neuen Bundesländern

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_X - \mu_Y \leq 0 \\ H_1 &: \mu_X - \mu_Y > 0 \end{aligned}$$

- Befragung unter 253 Personen aus den alten Bundesländern und 932 Personen aus den neuen Bundesländern
  - unverbundene Stichproben $X_1, \ldots, X_{253}$ und $Y_1, \ldots, Y_{932}$
  - Stichprobengrößen $m = 253, n = 932 > 30$
- Durchschnittliche Hördauer:
  11.4 h (Standardabweichung 8.4 h) in den alten Bundesländern
  9.5 h (Standardabweichung 8.4 h) in den neuen Bundesländern



## Beispiel: Radio-Hördauer Ost-West

- Signifikanzniveau: $\alpha = 0,1$
- Differenz der Radio-Hördauer

$$\overline{X} - \overline{Y} = 11.4 - 9.5 = 1.9$$

- Annahmebereich

$$\begin{aligned} \overline{X} - \overline{Y} &\leq z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}} \\ &= z_{0.9} \cdot \sqrt{\frac{8.4^2}{932} + \frac{8.4^2}{253}} \\ &\approx 1.28 \cdot 0.65 \\ &\approx 0.83 \end{aligned}$$

- $H_0$ wird abgelehnt, Personen aus den alten Bundesländern hören signifikant länger Radio.



## Doppelter $t$-Test auf die Erwartungswertdifferenz bei unabhängigen Stichproben

**Voraussetzungen:**

- $X$ und $Y$ sind zwei Größen mit Erwartungswerten $\mu_X$ und $\mu_Y$
- $X_1, \ldots, X_m$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ **unabhängige** Stichproben
- Testgröße: Differenz der Mittelwerte

$$\begin{aligned} T &= \overline{X} - \overline{Y} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \end{aligned}$$

- $X$ und $Y$ sind **normalverteilt**.
- Die Varianzen sind gleich $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$



## Doppelter $t$-Test auf die Erwartungswertdifferenz bei unabhängigen Stichproben

**Annahmebereich**

Für die beiden einseitigen $t$-Tests und den zweiseitigen $t$-Test auf die Differenz

| | | |
|---|---|---|
| $H_0 : \mu_X - \mu_Y = d_0$<br>$H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq d_0$ | $H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq d_0$<br>$H_1 : \mu_X - \mu_Y > d_0$ | $H_0 : \mu_X - \mu_Y \geq d_0$<br>$H_1 : \mu_X - \mu_Y < d_0$ |

ist der Annahmebereich

| | | |
|---|---|---|
| $d_0 \pm t_{(m+n-2;1-\frac{\alpha}{2})} s_d$ | $]-\infty, d_0 + t_{(m+n-2;1-\alpha)} s_d]$ | $[d_0 - t_{(m+n-2;1-\alpha)} s_d, \infty[$ |

mit

$$\begin{aligned} s_d &= s_{X,Y} \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \\ s_{X,Y}^2 &= \frac{1}{m+n-2}\left((m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2\right) \end{aligned}$$

$t_{(m+n-2;1-\frac{\alpha}{2})}$ und $t_{(m+n-2;1-\alpha)}$ sind die Quantile der $t$-Verteilung mit $m+n-2$ Freiheitsgraden.

## Tests auf Erwartungswertdifferenz bei abhängigen Stichproben

1. Gegeben ist eine verbundene Stichprobe
$X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_n$
2. Bilde die Differenz

$$W_i = X_i - Y_i \quad i = 1, \ldots, n$$

3. Führe einen Test auf den Erwartungswert von $W$ durch
   - $n > 30 \longrightarrow$ Gauß-Test
   - $W$ normalverteilt $\longrightarrow$ $t$-Test



## Differenz von Anteilen bei unabhängigen Stichproben

- $X$ und $Y$ sind zwei Bernoulli-Größen mit

$$p_X = P(X = 1)$$
$$p_Y = P(Y = 1)$$

- $X_1, \ldots, X_m$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ **unabhängige** Stichproben
- Testgröße: Differenz der Anteile

$$T = R_X - R_Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

- Faustregel: Stichprobenumfänge $m, n > 30$



## Differenz von Anteilen bei unabhängigen Stichproben

**Annahmebereich**

Für die beiden einseitigen Tests und den zweiseitigen Test auf die Differenz

$$H_0: p_X - p_Y = 0 \qquad H_0: p_X - p_Y \leq 0 \qquad H_0: p_X - p_Y \geq 0$$
$$H_1: p_X - p_Y \neq 0 \qquad H_1: p_X - p_Y > 0 \qquad H_1: p_X - p_Y < 0$$

ist der Annahmebereich

$$[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_R \,;\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_R] \qquad ]-\infty, z_{1-\alpha} \cdot s_R] \qquad [-z_{1-\alpha} \cdot s_R, \infty[$$

mit

$$s_R = \sqrt{R(1-R)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} \text{ und } R = \frac{m \cdot R_X + n \cdot R_Y}{m+n}$$



## Beispiel: Ist Fernsehen informativ?

Weiterführung des Beispiels aus dem Thema ,,Schätzen"

- Beurteilen Personen aus den alten Bundesländern den Informationsgehalt im Fernsehen anders als Personen aus den neuen Bundesländern?
  zweiseitiger Test
  $X$: Person aus den alten Bundesländern hält Fernsehen für informativ
  $Y$: Person aus den neuen Bundesländern hält Fernsehen für informativ
- Signifikanzniveau: $\alpha = 0.05$
- Umfrage: 253 Personen aus den alten Bundesländern, 932 Personen aus den neuen Bundesländern:
  ,,Halten Sie Fernsehen für informativ? Ja/Nein"
  - unverbundene Stichproben $X_1, \ldots, X_{253}$ und $Y_1, \ldots, Y_{932}$
  - Stichprobengrößen $m = 253, n = 932 > 30$

## Beispiel: Ist Fernsehen informativ?

- alte Bundesländer: 206 Personen halten Fernsehen für informativ
  neue Bundesländer: 747 Personen halten Fernsehen für informativ
- Anteile

$$R_X = \frac{206}{253} \approx 0.81 \quad \text{und} \quad R_Y = \frac{747}{932} \approx 0.80$$

- Standardfehler

$$\begin{aligned} R &= \frac{m \cdot R_X + n \cdot R_Y}{m+n} = \frac{253 \cdot 0.81 + 932 \cdot 0.8}{932 + 253} \\ &= \frac{950.53}{1185} \approx 0.802 \\ s_R &= \sqrt{R(1-R)(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})} = \sqrt{0.802 \cdot (1 - 0.802) \left(\frac{1}{932} + \frac{1}{253}\right)} \\ &\approx 0.03 \end{aligned}$$



## Beispiel: Ist Fernsehen informativ?

- Annahmebereich

$$\begin{aligned} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_R &\approx \pm z_{0.975} \cdot 0.03 \\ &\approx \pm 1.96 \cdot 0.03 \\ &\approx \pm 0.059 \end{aligned}$$

- Differenz der Anteile in der Stichprobe

$$R_X - R_Y \approx 0.81 - 0.8 = 0.01$$

- $H_0$ wird beibehalten, der Unterschied zwischen alten und neuen Bundesländern ist nicht signifikant



## Differenz von Anteilen bei abhängigen Stichproben

**Voraussetzungen:**

- $X$ und $Y$ sind zwei Bernoulli-Größen mit

$$\begin{aligned} p_X &= P(X = 1) \\ p_Y &= P(Y = 1) \end{aligned}$$

- $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ **abhängige, verbundene** Stichproben
- Absolute Haufigkeiten werden in einer Kontingenztafel festgehalten

| | Y=0 | Y=1 |
|---|---|---|
| X=0 | $n_{11}$ | $n_{12}$ |
| X=1 | $n_{21}$ | $n_{22}$ |

- Verwende Test von McNemar



## Zusammenhang zwischen 2 kategorialen Merkmalen

Sind zwei kategoriale Merkmale unabhängig? **Beispiele**

- Gibt es einen Zusammenhang zwischen besuchter Schule (Hauptschule, Realschule, Gymnasium) und Fernsehkonsum (hoch/niedrig)?
- Gibt es einen Zusammenhang zwischen Geschlecht (m/w) und der Affinität zu Fußball (Fan/kein Fan)?
- ...

→ Empirische Untersuchung mittels Kontingenztafeln und Kennzahlen

## Randverteilungen

Die zu den einzelnen Merkmalen gehörigen empirischen Häufigkeitsverteilungen heißen **Randverteilungen** oder **marginale** Verteilungen.

| Geschlecht \ Fußball | ja | nein | Summe |
|---|---|---|---|
| m | 87 | 10 | 97 |
| w | 23 | 31 | 54 |
| Summe | 110 | 41 | 151 |

Randverteilung Geschlecht

| m | w | |
|---|---|---|
| 97 | 54 | ← Absolute Häufigkeiten |
| $\frac{97}{151}$ | $\frac{54}{151}$ | ← Relative Häufigkeiten |

Randverteilung Fußballfan

| ja | nein | |
|---|---|---|
| 110 | 41 | ← Absolute Häufigkeiten |
| $\frac{110}{151}$ | $\frac{41}{151}$ | ← Relative Häufigkeiten |



## Bedingte Verteilung

Unter der **bedingten Verteilung** von $X$ gegeben $Y = B_j$ versteht man die Verteilung von $X$ in der Teilgesamtheit der Untersuchungseinheiten, die die Ausprägung $B_j$ des Merkmals $Y$ aufweisen.

| Geschlecht \ Fußball | ja | nein | Summe |
|---|---|---|---|
| m | 87 | 10 | 97 |
| w | 23 | 31 | 54 |
| Summe | 110 | 41 | 151 |

Verteilung „Fußballfan“ bei Männern

| ja | nein | Ges. |
|---|---|---|
| 87 | 10 | 97 |
| 90% | 10% | 100% |

Verteilung “Geschlecht“ bei Fußballfans

| m | w | Ges. |
|---|---|---|
| 87 | 23 | 110 |
| 79% | 21% | 100% |



## Empirische Unabhängigkeit

- Falls die beiden Merkmale unabhängig voneinander sind, so sollte

,,relative Häufigkeit Fußballfan”
≈ ,,relative Häufigkeit Fußballfans unter Frauen”
≈,,relative Häufigkeit Fußballfans unter Männern”

- **Formel:**

$$\text{bedingte relative Häufigkeit } \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} = \frac{n_{i\bullet}}{n} \text{ relative Randhäufigkeit}$$

- Daraus folgt

$$e_{ij} := \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}$$

ist die **unter Unabhängigkeit erwartete Anzahl**.

- Falls die Merkmale **unabhängig** sind, sollte gelten:

$$e_{ij} \approx n_{ij}$$



## $\chi^2$-Unabhängigkeitstest

- Zwei Zufallsgrößen $X$ und $Y$ mit $k$ bzw. $l$ Ausprägungen

$$p_{ij} = P(X = i, Y = j)$$
$$p_{i\bullet} = P(X = i) \quad p_{\bullet j} = P(Y = j)$$

- Hypothesen:

$H_0$ : X und Y sind stochastisch unabhängig
$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$ für alle $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$

$H_1$ : X und Y sind stochastisch abhängig
$p_{ij} \neq p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$ für mindestens eine ij-Kombination

- Prüfgröße:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

- Faustregel $n_{ij} \geq 5$ für alle $i, j$

# $\chi^2$-Unabhängigkeitstest

**Annahmebereich**

Für den $\chi^2$-Unabhängigkeitstest ist der Annahmebereich

$$\chi^2 \quad \leq \quad q_{1-\alpha,\,(k-1)(l-1)}$$

Die Nullhypothese wird abgelehnt, falls

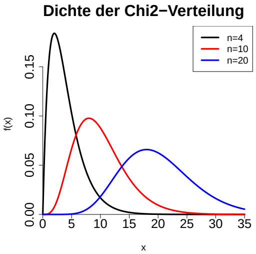
$$\chi^2 \quad > \quad q_{1-\alpha,\,(k-1)(l-1)}$$

Dabei ist $q_{1-\alpha,\,(k-1)(l-1)}$ das

- $(1-\alpha)$-Quantil
- der $\chi^2$-Verteilung
- mit $(k-1)\cdot(l-1)$ Freiheitsgraden.



# Dichte der $\chi^2$-Verteilung mit $n$ Freiheitsgraden






# Beispiel

$$e_{ij} \quad = \quad \frac{n_{i\bullet}n_{\bullet j}}{n}$$

| Fußball / Geschlecht | ja | nein | Summe |
|---|---|---|---|
| m | 87 | 10 | 97 |
| w | 23 | 31 | 54 |
| Summe | 110 | 41 | 151 |

Erwartete Besetzungszahlen bei Unabhängigkeit

| | ja (j=1) | nein (j=2) |
|---|---|---|
| m (i=1) | $\frac{97\cdot 110}{151} \approx 71$ | $\frac{97\cdot 41}{151} \approx 26$ |
| w (i=2) | $\frac{54\cdot 110}{151} \approx 39$ | $\frac{54\cdot 41}{151} \approx 15$ |

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{(n_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}\\ &\approx \frac{(87-71)^2}{71}+\frac{(10-26)^2}{26}+\frac{(23-39)^2}{39}+\frac{(31-15)^2}{15}\\ &\approx 37.09\end{aligned}$$



# Beispiel

- Signifikanzniveau: $\alpha = 0.01$
- Faustregel gültig?
  Besetzungszahlen $n_{ij} \geq 5$
- Bestimmung der Freiheitsgrade: $k = l = 2$

$$\text{Freiheitsgrade} \quad = \quad (k-1)\cdot(l-1) = (2-1)\cdot(2-1) = 1$$

$$q_{1-0.01;\,(2-1)(2-1)} \quad = \quad q_{0.09;\,1} \approx 6,63$$

- $H_0$ wird abgelehnt

# Unabhängigkeit und Differenz von Anteilen

Die beide Fragen:

- Gibt es Unterschiede in den Anteilen von Y=1 zweier Gruppen ?
- Gibt es einen Zusammenhang zwischen Gruppen–Zugehörigkeit und einem binären Binären Merkmal Y ?

sind äquivalent.

Die beiden Testprozeduren Gauss Test für Differenzen von Anteilen und $\chi^2$-Unabhängigkeitstest führen zum gleichen Ergebnis.