

Aufgabe 23

Eine Möglichkeit die Größe einer unbekannt Population zu schätzen ist die Capture-Recapture-Methode. Diese wird häufig in der Biologie zur Schätzung von Tierpopulationen angewandt, aber auch in den Sozialwissenschaften, wenn es beispielsweise um die Schätzung von Personen mit rechtsradikalem Hintergrund oder Drogenkonsumenten geht.

2010 wurde die Capture-Recapture-Methoden von Thomas Gautschi und Dominik Hangartner angewandt um die Anzahl an Drogensüchtigen in Zürich zu schätzen ¹. Zum Zeitpunkt t_1 wurden in einer Kontakt- und Anlaufstelle (K&A) für Drogenkonsumenten n_1 Personen registriert. Zu einem späteren Zeitpunkt t_2 wurden erneut die Besucher (insgesamt n_2) der K&A registriert. Die Anzahl der bereits vom Zeitpunkt t_1 bekannten Personen sei m_2 .

- a) Der Anteil $p = \frac{n_1}{N}$ der registrierten Drogensüchtigen bezogen auf die Gesamtzahl N der Drogensüchtigen wird geschätzt mittels:

$$\hat{p} = \frac{m_2}{n_2}.$$

Zeigen Sie, dass \hat{p} ein erwartungstreuer Schätzer für p ist.

- b) Wie lässt sich nun die Gesamtzahl an Drogenabhängigen in Zürich schätzen?
- c) Berechnen Sie diese, wenn zum Zeitpunkt t_1 $n_1 = 176$ Personen registriert wurden und zum Zeitpunkt t_2 $n_2 = 200$ Personen die A&K besuchten, wovon $m_2 = 44$ bereits registriert waren.
- d) Wie groß ist die Zahl an Drogensüchtigen, wenn zum Zeitpunkt t_2 keine einzige bereits registrierte Person (d.h. $m_2 = 0$) die A&K aufsucht?

¹Der Artikel ist abrufbar unter <http://www.zfs-online.org/index.php/zfs/article/view/3048>.

Aufgabe 24

Die Zeit, die eine Mannschaft ohne Gegentor bleibt (in Minuten ab Beginn der Fußball-Europameisterschaft), wird als zufällig angenommen. Als Modell für die Wartezeit bis zum ersten Gegentor betrachtet man die Zufallsvariable X_i , von der angenommen wird, dass sie *exponentialverteilt* ist mit Parameter $\lambda > 0$. Die Dichte ist also $f(x_i) = \lambda \exp(-\lambda x_i)$.

Man betrachte nun n Mannschaften, wobei die Wartezeit bis zum ersten Gegentor pro Mannschaft durch die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n beschrieben wird.

- a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}$ für die n Beobachtungen.
- b) In der Fußball-Europameisterschaft 2012 ergeben sich für die teilnehmenden 16 Mannschaften die folgenden Zeiten ohne Gegentor:

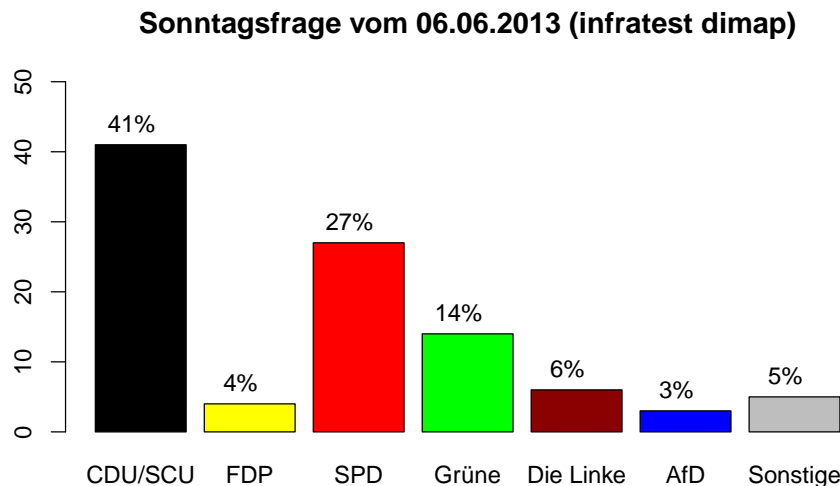
Mannschaft	Zeit	Mannschaft	Zeit
Polen	50	Spanien	59
Griechenland	16	Italien	63
Russland	51	Irland	2
Tschechien	14	Kroatien	18
Niederlande	23	Frankreich	29
Dänemark	113	England	38
Deutschland	162	Ukraine	51
Portugal	71	Schweden	54

Berechnen Sie für diese Daten den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$.

- c) Halten Sie die Exponentialverteilung für ein realistisches Modell für die Wartezeit bis zum ersten Gegentor?

Aufgabe 25

Mit der Sonntagsfrage ermittelt die Gesellschaft für Trend- und Wahlforschung infratest dimap seit 1997 zwischen den Wahlen die aktuelle politische Stimmung in Deutschland. Dazu wird regelmäßig mindestens 1000 Bundesbürgern die Frage: "Welche Partei würden Sie wählen, wenn am kommenden Sonntag Bundestagswahl wäre?" gestellt. Folgende Graphik zeigt die Ergebnisse der letzten Befragung:



- Berechnen Sie ein 95% Konfidenzintervall für den wahren Anteil p der Personen, die die CDU/CSU oder die FDP wählen würden, wenn am nächsten Sonntag Bundestagswahl wäre (Gehen Sie dabei von einem Stichprobenumfang von $n = 1000$ aus).
- Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens gewählt werden, damit ein 95% Konfidenzintervall in jedem Fall nicht breiter als 1% ist?

Aufgabe 26

Die Gewerbeaufsicht will die Schankgenauigkeit auf dem Oktoberfest überprüfen. Bei einer Stichprobe $n = 9$ ergibt sich als durchschnittlicher Inhalt pro Maß $\bar{x} = 0.97$ Liter. Es wird angenommen, dass der Inhalt pro Maß normalverteilt ist.

- Berechnen Sie ein Konfidenzintervall zu $\gamma = 0.95$ für den unbekanntten Erwartungswert μ unter der Annahme $\sigma^2 = 0.075^2$.
- Berechnen Sie ein Konfidenzintervall zu $\gamma = 0.95$ für den unbekanntten Erwartungswert μ , wenn aus den Daten $s^2 = 0.075^2$ bestimmt wurde.
- Welches Intervall ist breiter? Erläutern Sie Ihre Antwort.