Aufgabe 19

Für zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y sei nur die gemeinsame Verteilung bekannt:

		Y			
		1	2	3	
X	1	0	1/2	1/4	
	2	1/6	1/12	0	

a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y.

b) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = 2$.

c) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen X und Y. Kann eine Aussage über die Stärke des Zusammenhangs getroffen werden?

d) Berechnen Sie die Varianz von $X + Y$.

e) Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 20

Für $i = 1, \dots, 10000$ beschreibe die (nichtnegative) Zufallsvariable X_i die Summe (in Euro), die eine Unfallversicherung an Person i bezahlen muss. Die Schadenssummen seien identisch und unabhängig verteilt. Weiterhin seien Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen bekannt:

$$\mathbb{E}(X_i) = 100$$

$$Var(X_i) = 10000.$$

a) Wie ist der Mittelwert $\bar{X} := \frac{1}{1000} \sum\limits_{i=1}^{1000} X_i$ der Zufallsvariablen (approximativ) verteilt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Versicherung pro Person durchschnittlich eine Summe von mehr als 101 Euro auszahlen muß?

Aufgabe 21

Man betrachtet n Zufallsvariablen $X_i, i = 1, \dots, n$, die unabhängig identisch normalverteilt sind mit $\mu_{X_i} = 0$ und $\sigma^2_{X_i} = 1$. Die Zufallsvariable $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ist dann normalverteilt mit $\mu_{\bar{X}_n} = 0$ und $\sigma^2_{\bar{X}_n} = \frac{1}{n}$.

a) Skizzieren Sie die Dichte von $\bar{X}_n$ für verschiedene Werte von n.

b) Betrachten Sie für ein festes $c > 0$ Intervalle der Art $[\mu_{\bar{X}_n} - c\,,\, \mu_{\bar{X}_n} + c]$. Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit für $\bar{X}_n \in [\mu_{\bar{X}_n} - c\,,\, \mu_{\bar{X}_n} + c]$ in Abhängigkeit von n?

c) Seien nun $Y_1, \dots, Y_n$ bernoulliverteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit π. Dann ist der Schätzer $\bar{Y}_n$ für die Erfolgswahrscheinlichkeit π für sehr große n annähernd normalverteilt mit Erwartungswert π und Varianz $\frac{\pi(1-\pi)}{n}$. Wie ändern sich in diesem Fall die Wahrscheinlichkeiten $P(\bar{Y}_n \in [\pi - c, \pi + c])$ in Abhängigkeit von n und π?

Aufgabe 22 (ehemalige Klausuraufgabe, zum Selbststudium)

Wir betrachten n unabhängige Zufallsziehungen aus einer Normalverteilung ($n > 7$). Das i-te Experiment wird durch die Zufallsvariable X_i beschrieben, mit $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Wir betrachten zwei mögliche Schätzer für den unbekannten Erwartungswert μ:

$$T_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad T_b = \frac{1}{3} (X_3 + X_5 + X_7)$$

a) Prüfen Sie die Erwartungstreue der beiden Schätzer.

b) Welchen Schätzer würden Sie bevorzugen? (Begründung!)