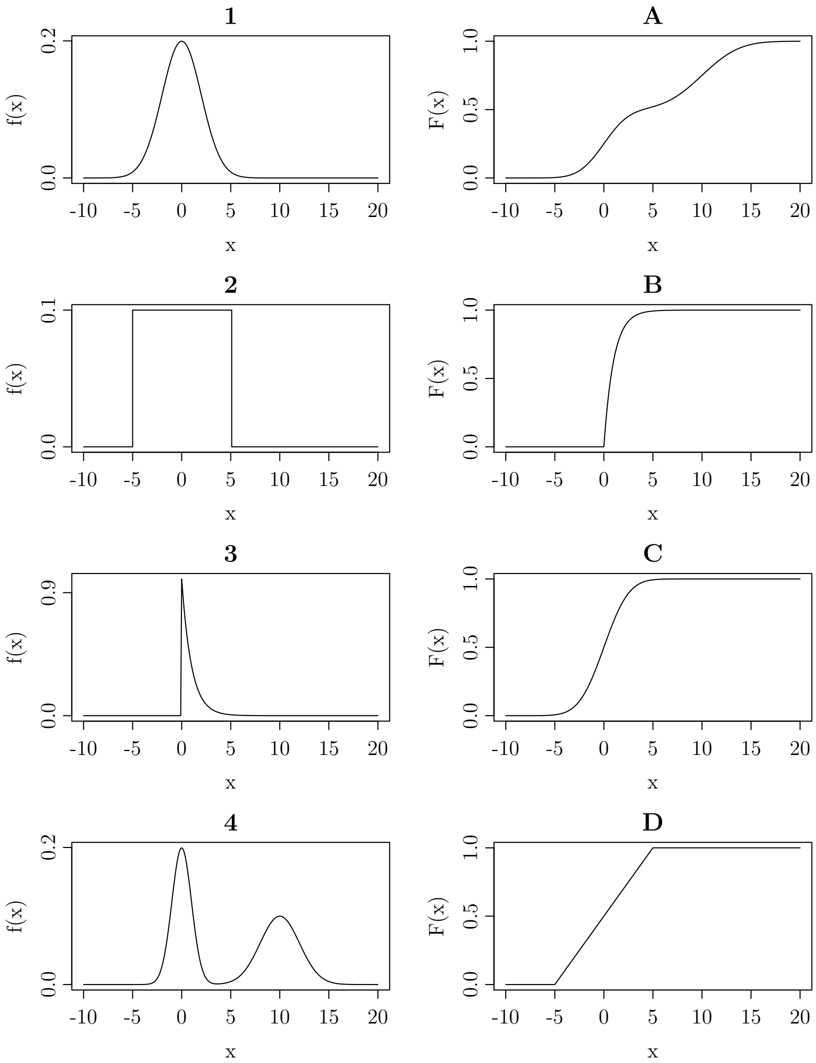
Statistik II für Studierende der Soziologie und Nebenfachstudierende
(Küchenhoff, Brandt, Schollmeyer)

Sommersemester 13 **Übungsblatt 5**

Aufgabe 11

Im Folgenden sehen Sie vier Dichtefunktionen (links) und vier Verteilungsfunktionen (rechts). Ordnen Sie jeder Dichtefunktion die zugehörige Verteilungsfunktion zu! Haben Sie eine Vermutung, um welche Verteilungen es sich handelt?



Aufgabe 12

Eine Zufallsvariable X nimmt die Werte 1 und -1 jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.5 an. Nun wird die Zufallsvariable Y definiert mit $Y := 3 + 2 \cdot X$.

a) Wie sieht die Verteilung von Y aus?

b) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X und Y.

Aufgabe 13

a) Vier Personen spielen das Spiel „Mensch ärgere Dich nicht“. Dabei habe jede Person einen eigenen Würfel. Alle Würfel bis auf einen sind fair, der letzte Würfel würfelt mit 80-prozentiger Wahrscheinlichkeit eine 6. Welche Person den gezinkten Würfel besitzt sei allen Spielern unbekannt.

   (i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das eine zufällig ausgewählte Person X den gezinkten Würfel besitzt.

   (ii) Jetzt werde 10 Runden gespielt und die Person X hat genau sieben mal eine 6 gewürfelt. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Person X den gezinkten Würfel besitzt, genauer: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, den gezinkten Würfel zu besitzen unter der Bedingung, dass man bei 10 Würfen 7 mal eine 6 würfelt?

b) Übertragen Sie die obigen Ergebnisse auf folgende Situation der bayesschen Inferenz:
Es werden 4 Experten nach Ihrer subjektiven Wahrscheinlichkeit dafür, dass Mario Gòmez in seinem nächsten Spiel ein Tor erzielt, befragt. Dabei gebe ein Experte die Wahrscheinlichkeit 0.8 und alle anderen Experten die Wahrscheinlichkeit 1/6 an. Die Situation kann also so verstanden werden, dass es zwei Theorien gibt (nämlich $T_1 : P(\text{Gòmez schießt im nächsten Spiel ein Tor }) = 0.8$ und $T_2 : P(\text{Gòmez schießt im nächsten Spiel ein Tor }) = 1/6$), von denen T_2 als wahrscheinlicher angesehen werden kann, da mehr Experten der Annahme sind, dass T_2 richtig ist.

   (i) Wie sehen hier die A-priori-Wahrscheinlichkeiten und der dazugehörige Grundraum aus? (Wir gehen hier davon aus, dass alle Experten gleich verlässlich sind)

   (ii) Wie sehen die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten aus, wenn bekannt ist, dass Mario Gòmez in 7 der letzten 10 Spiele ein Tor erzielt hat.

   (iii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Gòmez im nächsten Spiel ein Tor erzielt?

(iv) Welche prinzipiellen Unterschiede gibt es zwischen Situation a) und Situation b), in der der Satz von Bayes angewendet wurde?

Aufgabe 14

Folgende Tabelle gibt die Anzahl der von preußischen Jungen unter 10 Jahren im Zeitraum von $1869 - 1893$ begangenen Selbstmorde wieder:[1]

Anzahl x von Selbstmorden pro Jahr	Anzahl der Jahre, in denen x Selbstmorde vorkamen
0	4
1	8
2	5
3	3
4	4
5	0
6	1
7 oder mehr	0

a) Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl $\hat{\lambda}$ von Selbstmorden pro Jahr.

b) Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Selbstmorde pro Jahr poissonverteilt ist mit Parameter $\lambda = \hat{\lambda}$ aus a). Berechnen Sie auf dieser Grundlage die Wahrscheinlichkeiten dafür, in einem Jahr $0, 1, 2, \ldots, 7$ Selbstmorde zu beobachten und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den tatsächlich beobachteten relativen Häufigkeiten.

c) Wie groß ist die wahrscheinlichste Anzahl von beobachteten Selbstmorden pro Jahr und wie hoch ist die häufigste im Zeitraum von $1869 - 1893$ beobachtete Anzahl von Selbstmorden (pro Jahr). Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit der Aussage

„Nur hat man in die maßgebende Formel (2) des §1 anstatt der Unbekannten m den wahrscheinlichsten Wert ihrer, nämlich den Mittelwert $m' = \frac{49}{25} = 1.96$ einzusetzen.“ [2]

[1] aus *Bortkewitsch, L. v. (1898): Das Gesetz der Kleinen Zahlen, Teubner, Leipzig.*, S.17, zu finden unter `http://www.archive.org/stream/dasgesetzderklei00bortrich#page/n49/mode/2up`

[2] aus *Bortkewitsch, L. v. (1898): Das Gesetz der Kleinen Zahlen, Teubner, Leipzig., S.18*