Das Rasch-Modell

Emil Fazli
Betreuer: Dr. Marco Cattaneo

17. Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einfuehrung

In der Schule, im Beruf oder auch in Kliniken werden psychologische Tests verwendet um zum Beispiel die mathematische Kompetenz von Schülern, Eignung von Bewerbern, Persönlichkeitseigenschaften oder die Neigung zu Depressionen zu messen. Dabei sind die zu messenden Eigenschaften der Personen latente, d.h. nicht direkt beobachtbare, Merkmale. Den Personen werden aus diesem Grund Aufgaben oder Fragen gestellt. Anhand der Antworten soll sich Aufschluss über die interessierende Eigenschaft verschafft werden.

Bei einem Leistungs -oder Intelligenztest wird zum Beispiel erfasst welche bzw. wie viele Aufgaben die Person richtig beantwortet hat. Als Ergebnis des Tests erhält man eine **Schätzung** der Fähigkeit bzw. die Ausprägung des latenten Merkmals.

Zunächst muss der Test konstruiert werden. Ein Expertenteam generiert dafür einen Satz von Aufgaben. Diese Aufgaben werden kritisch geprüft und oft müssen einige von ihnen aussortiert werden, da sie bestimmte Kriterien nicht erfüllen. Eine der häufigsten Ursachen für den Ausschluss von Aufgaben ist, dass sie nicht nur die interessierende Eigenschaft messen, sondern noch weitere Eigenschaften relevant für die Lösung der Aufgabe sind. Bei einem Mathematiktest können die Textaufgaben so formuliert sein, dass sie Schüler mit Deutsch als Fremdsprache benachteiligen. Das Testergebnis wäre somit verzerrt und falsche Schlüsse können gezogen werden, die die schulische oder berufliche Laufbahn der Testpersonen beeinträchtigen können.

Um das zu verhindern muss man die Aufgaben einer strengen Prüfung unterziehen. Dies kann zum Beispiel durch das Rasch-Modell geschehen. Dieses wurde bereits im Jahr 1960 von dem dänischen Statistiker Georg Rasch veröffentlicht. Jedoch wurde dieses Modell als zu "streng" empfunden, da seine Gültigkeit für viele psychologische Tests abgelehnt werden muss. Gleichzeitig hat die Abschreckungswirkung seiner mathematische Darstellung dazu geführt, dass es viele Jahre nicht als Hilfsmittel zur praktischen Testkonstruktion betrachtet wurde. Mittlerweile wird es nicht nur zu Konstruktion neuer Tests verwendet wie der PISA Studie der OECD, sondern bereits etablierte Tests werden nachträglich überprüft ob sie mit dem Rasch-Modell vereinbar sind.

2 Mathematische Formulierung

In diesem Kapitel wollen wir die Datenstruktur sowie die Modellgleichung des Rasch-Modells kennen lernen. Dazu kommen zentrale statistische Annahmen und ihre inhaltliche Bedeutung, die erklärt werden.

2.1 Die Datenmatrix

Das Rasch-Modell wird zur Auswertung von Tests zur Leistungs- und Einstellungsmessung verwendet. Diese Tests sollen, wie bereits in der Einleitung erwähnt, latente Merkmale der Personen messen. Dazu wird für jede Person, die am Test teilnimmt notiert, ob sie die Aufgaben, die gestellt werden richtig oder falsch beantwortet. Bei Aussagen wird notiert ob die Person, der Aussage zustimmt oder sie ablehnt.Für richtige Antworten oder Zustimmungen erhält die Person eine 1, für falsche Antworten oder Ablehnungen eine 0. Diese werden in einer Tabelle oder Datenmatrix eingetragen.In Abbildung 1 wird zum Beispiel eine Datenmatrix dargestellt, die Antworten von 5 Personen auf 4 Fragen. Die vierte Person hat hier nur die vierte Frage richtig beantwortet, die fünfte Person hingegen hat die erste, zweite und vierte Frage richtig beantwortet.

	Aufgabe			
Person	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	1	1	0
3	0	1	1	1
4	0	0	0	1
5	1	1	0	1

Abbildung 1: Datenmatrix eines Tests mit 4 Aufgaben, an dem 5 Personen teilnehmen

Allgemein betrachtet man die Situation, dass i = 1,...,n Personen an einem Test mit j = 1,..,m Aufgaben teilnehmen. Die Datenmatrix besteht also aus n Zeilen und m Spalten. Die Einträge der Datenmatrix bezeichnen wir mit u_{ij}, d.h. der Eintrag u_{ij} gehört zur Person i und zur Aufgabe j.

Da das Ergebnis einer Testperson nicht deterministisch von ihrer Fähigkeit abhängt, sondern dabei auch Zufall im Spiel ist, handelt es sich um eine Wahrscheinlichkeit mit der eine Person eine Aufgabe richtig beantwortet, der sogenannten Lösungswahrscheinlichkeit. Schließlich besteht die Möglichkeit, dass eine Person mit gleichbleibender Fähigkeit an unterschiedlichen Tagen an

	Aufgabe						
Person	1	2	...	j	...	m-1	m
1	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	...	$u_{1,j}$	...	$u_{1,m-1}$	$u_{1,m}$
1	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	...	$u_{2,j}$	...	$u_{2,m-1}$	$u_{2,m}$
$\vdots$	...	...	...	...	...	...	...
i	$u_{i,1}$	$u_{i,2}$	...	$u_{i,j}$	...	$u_{i,m-1}$	$u_{i,m}$
$\vdots$	...	...	...	...	...	...	...
n-1	$u_{n-1,1}$	$u_{n-1,2}$	...	$u_{n-1,j}$	...	$u_{n-1,m-1}$	$u_{n-1,m}$
n	$u_{n,1}$	$u_{n,2}$	...	$u_{n,j}$	...	$u_{n,m-1}$	$u_{n,m}$

Abbildung 2: Datenmatrix eines Tests mit m Aufgaben, an dem n Personen teilnehmen

demselben Test nicht genau dieselbe Punktzahl erreichen würde, da sie zum Beispiel aufgrund von Müdigkeit an einem Tag Flüchtigkeitsfehler machen würde.

Man kann deswegen nicht mit hundertprozentiger Sicherheit sagen, dass eine sehr fähige Person eine Aufgabe richtig beantwortet, bevor sie es versucht hat. Man kann lediglich eine hohe Wahrscheinlichkeit annehmen. Deswegen braucht man zusätzlich, neben den Einträgen u_{ij} in der Datenmatrix, die man bereits beobachtet hat, die Zufallsvariablen U_{ij}. Diese Zufallsvariablen stehen für das unbekannte Ergebnis, bevor die Personen die Aufgaben bearbeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass Person i bei der Beantwortung von Aufgabe j das Ergebnis u_{ij} (0 oder 1) erzielt wird mit $\mathrm{P}(U_{ij} = u_{ij})$ zum Ausdruck gebracht.

2.2 Die Modellgleichung

Die Modellgleichung soll die Wahrscheinlichkeit beschreiben, dass eine Person mit einer bestimmten Fähigkeit eine Aufgabe mit einer bestimmten Schwierigkeit richtig beantwortet.

Daraus ergeben sich folgende Eigenschaften, die die Modellgleichung haben soll:

1. Die Fähigkeit der Person soll berücksichtigt werden (wir benennen die Fähigkeit der Person i mit θ_i).
2. Die Schwierigkeit der Aufgabe soll berücksichtigt werden (wir benennen die Schwierigkeit der Aufgabe j mit β_j).
3. Je fähiger die Person, desto höher ihre Lösungswahrscheinlichkeit. Das

heißt die Funktion soll mit der Personen-Fähigkeit ansteigen.
4. Das Ergebnis muss zwischen 0 und 1 liegen, da es sich um eine Wahrscheinlichkeit handelt.

Das Rasch-Modell mit folgender Modellgleichung erfüllt diese Forderungen:

$$P(U_{ij} = 1|\theta_i, \beta_j) = \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}}$$

Man sieht, dass die Lösungswahrscheinlichkeit von der Fähigkeit der Person und der Schwierigkeit der Aufgabe abhängt. An der Differenz $\theta_i - \beta_j$ erkennt man, dass die Funktion mit der Überlegenheit der Person über die Aufgabe ansteigt. Je größer die Differenz desto größer die Lösungswahrscheinlichkeit. Zusätzlich handelt es sich um eine logistische Funktion mit der vereinfachten Form:

$$\frac{e^x}{1 + e^x}$$

Aus Statistik-Vorlesungen ist uns bekannt, dass die logistische Funktion nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann und somit dafür geeignet ist Wahrscheinlichkeiten abzubilden.

Es existieren weitere Darstellungsformen der Modellgleichung, die durch einfache Umformungen erklärt werden können. Da es für u_{ij} die Werte 0 und 1 gibt, kann man die Gleichung auch für den umgekehrten Fall umformen. Falls die Wahrscheinlichkeit interessiert, dass die Person die Aufgabe nicht löst erhält man folgende Formel:

$$P(U_{ij} = 0|\theta_i, \beta_j) = \frac{1}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}}$$

Es handelt sich um Gegenwahrscheinlichkeiten, die sich zu 1 aufsummieren. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
P(U_{ij} = 0|\theta_i, \beta_j) &= 1 - P(U_{ij} = 1|\theta_i, \beta_j) \\
&= 1 - \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}} \\
&= \frac{1 + e^{\theta_i - \beta_j} - e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}} \\
&= \frac{1}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}}
\end{aligned}$$

Praktischerweise lassen sich beide Formeln in einer gemeinsamen Formel zusammenfassen. Hier wird noch offen gelassen ob sich als Wert für u_{ij} 0 oder 1 ergibt:

$$P(U_{ij} = u_{ij}|\theta_i, \beta_j) = \frac{e^{u_{ij}(\theta_i - \beta_j})}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}}$$

Man kann auch eine multiplikative Darstellung des Rasch-Modells vorfinden:

$$P(U_{ij} = 1|\xi_i, \sigma_j) = \frac{\xi_i \cdot \sigma_j}{1 + \xi_i \cdot \sigma_j}$$

Mit der Umparametrisierung $\xi_i = e^{\theta_i}$ und $\sigma_j = e^{-\beta_j}$ ergibt sich wieder unsere erste Formel.

2.3 ICC - Item Characteristic Curve

Die logistische Funktion mit ihrem S-förmigen Verlauf, wird verwendet, um den Verlauf der Lösungswahrscheinlichkeit für eine Aufgabe in Abhängigkeit von der Personen-Fähigkeit darzustellen. Diese Darstellung bezeichnet man als aufgabencharakteristische Kurve oder ICC(Item Characteristic Curve).

Wie in Abbildung 3 zu sehen ist hat eine Person i mit einer Fähigkeit $\theta_i = 2$ (auf der x-Achse ablesen) eine sehr hohe Lösungswahrscheinlichkeit(auf der y-Achse ablesen), da sie fähiger ist, als die Aufgabe schwer ist. Eine Person mit der Fähigkeit $\theta_i = -1$ hat dagegen deutlich geringere Chancen die Aufgabe zu lösen. Falls $\theta_i = \beta_j$, erhält man eine Lösungswahrscheinlichkeit von 0,5 ($e^0 = 1$).

Bei mehreren Aufgaben zeichnet man die ICCs nebeneinander. Man erkennt, dass die Aufgaben zwar je nach Schwierigkeit nach rechts(schwieriger) oder links(leichter) verschoben sind, jedoch parallel zueinander verlaufen. Diese Eigenschaft ergibt sich aus der Modellgleichung des Rasch-Modells. Es gibt für jede Aufgabe nur einen Parameter, nämlich β_j, der sich ändern kann. Es gibt keine weiteren Parameter, die die Steigung oder Form der Kurve verändern könnten.

Inhaltlich bedeutet das, dass alle Aufgaben die gleiche Steigung im mittleren Bereich der ICCs haben. Diesen Bereich bezeichnet man als Trennschärfe. Je höher die Trennschärfe, desto genauer kann man die Fähigkeiten der Personen unterscheiden, denn mit einer höheren Steigung kann die Lösungswahrscheinlichkeit auch bei geringfügig höheren Fähigkeiten stark zunehmen.

Diese Eigenschaft des Modells ist gleichzeitig eine starke Forderung, die jeder Test erfüllen muss, der mit dem Rasch-Modell ausgewertet werden

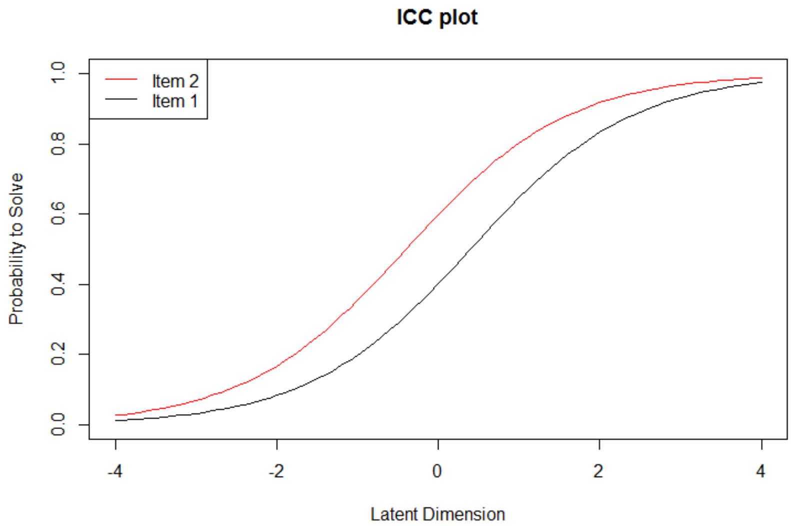

Abbildung 3: Aufgabencharakteristische Kurven für 2 Aufgaben

soll. Bei echten Tests kann es durchaus vorkommen, dass er Aufgaben mit unterschiedlicher Trennschärfe enthält. Dieser Test ist dann nicht″Rasch-skalierbar‟und erlaubt somit keine objektiven Messungen im Sinne von Rasch. Es gibt Tests die diese Annahme überprüfen, sowie andere Modelle in der Item-Response -Theorie, die unterschiedlich trennscharfe Aufgaben zulassen.

2.4 Modellannahmen

Mann kann einerseits sagen, dass das Rasch-Modell bestimmte Eigenschaften durch seine Modellgleichung hat. Andererseits ist aus messtheoretischer Sicht umgekehrt. Hier sagt man, dass aus bestimmten theoretischen Annahmen die Modellgleichung abgeleitet werden kann.

Welchen Annahmen das sind und welche Eigenschaften daraus folgen, die dem Rasch-Modell eine objektive Messung von latenten Eigenschaften ermöglichen, soll nun erläutert werden.

2.4.1 Suffiziente Staistiken

Eine Statistik ist eine Kenngröße, die man aus den Daten berechnet. Eine suffiziente Statistik ist eine Statistik, die die gesamte Information der Stichprobe über den unbekannten Parameter beinhaltet. Ein Beispiel für eine suffiziente Statistik ist der Mittelwert $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, den man als Schätzer für den Erwartungswert einer Verteilung verwenden kann. $x^* = \frac{1}{3}(x_1 + x_3 + x_5)$ könnte man auch als Schätzer für den Erwartungswert verwenden. Dieser wäre zwar erwartungstreu, jedoch nicht suffizient.

Im Rasch-Modell gibt es für jeden unbekannten Parameter eine suffiziente Statistik:
Für jede Person i enthält die Zeilen-Randsumme r_i, die gesamte Information über den Personen-Parameter θ_i Für jede Aufgabe j enthält die Spalten-Randsumme s_j die gesamte Information über den Aufgaben-Parameter β_j.

Die Zeilen-Randsumme ergibt sich allgemein als $r_i = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}$, die Spalten-Randsumme als $s_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij}$. Das bedeutet, dass man nicht wissen muss, welche Aufgaben eine Person gelöst hat um ihre Fähigkeit schätzen zu können, sondern nur wie viele sie insgesamt sie richtig gelöst hat.

Für einzelne Aufgaben muss man die Fähigkeit der Person, sowie die Schwierigkeit der Aufgabe kennen. Über den gesamten Test betrachtet, ist die Anzahl der gelösten Aufgaben Indikator für die Fähigkeit der Person. Eine Person mit höherer Fähigkeit wird sowohl schwierige als auch leichte Aufgaben lösen können. Eine Person mit niedriger Fähigkeit hingegen wird vermutlich nur die einfachen Aufgaben lösen können.

	Aufgabe				
Person	1	2	3	4	r_i
1	0	1	0	1	2
2	0	1	1	0	2
3	0	1	1	1	3
4	0	0	0	1	1
5	1	1	0	1	3
s_j	1	4	2	4	

Abbildung 4: Datenmatrix eines Tests mit Zeilen- und Spalten-Randsummen

2.4.2 Lokale stochastische Unabhaengigkeit

Sind zwei Ereignisse stochastisch unabhängig, hat das Ergebnis des ersten Ereignisses keinen Einfluss auf das zweite, umgekehrt trifft dies ebenfalls zu. Bei einem Münzwurf zum Beispiel ändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht im 2. Wurf Kopf zu werfen, wenn bereits im ersten Kopf geworfen wurde.

Zusätzlich kann man wenn stochastische Unabhängigkeit gilt, die gemeinsame Wahrscheinlichkeit als Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten berechnen.

Beim Rasch-Modell wird diese Eigenschaft verwendet um die Lösungswahrscheinlichkeit für mehrere Aufgaben auszurechnen. Allgemein ergibt sich für $j = 1, ..., m$ Aufgaben:

$$
\begin{aligned}
P(U_{i1} = u_{i1}, ..., U_{im} = u_{im} | \theta_i, \beta_1, ..., \beta_m) &= 1 - P(U_i = u_i | \theta_i, \beta) \\
&= \prod_{j=1}^{m} P(U_{ij} = u_{ij} | \theta_i, \beta_j) \\
&= \prod_{j=1}^{m} \frac{e^{u_{ij}(\theta_i - \beta_j)}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}} \\
&= \frac{e^{\sum\limits_{j=1}^{m} u_{ij}(\theta_i - \beta_j}}{\prod\limits_{j=1}^{m} (1 + e^{\theta_i - \beta_j})} \\
&= \frac{e^{\sum\limits_{j=1}^{m} u_{ij} \cdot \theta_i - \sum\limits_{j=1}^{m} u_{ij} \cdot \beta_j}}{\prod\limits_{j=1}^{m} (1 + e^{\theta_i - \beta_j})} \\
&= \frac{e^{r_i \cdot \theta_i - \sum\limits_{j=1}^{m} u_{ij} \cdot \beta_j}}{\prod\limits_{j=1}^{m} (1 + e^{\theta_i - \beta_j})}
\end{aligned}
$$

Die Ergebnisse für alle $j = 1, ..., m$ Aufgaben, $U_{i1} = u_{i1}, ..., U_{im} = u_{im}$, kann man dabei wie in der ersten Zeile der Gleichung zu einer vektoriellen Zufallsvariablen U_i zusammenfassen, die einen Vektor von Werten u_i annimmt. Dieser Vektor von Werten entspricht der Zeile für eine Person i in der Datenmatrix und enthält die Ergebnisse der Person für alle Aufgaben. Gleichzeitig werden die Aufgaben-Parameter $\beta_1, ..., \beta_m$ zu einem Vektor β zusammengefasst.

Für die Tests bedeutet diese Annahme des Rasch-Modells, dass sich die Lösungswahrscheinlichkeit einer Aufgabe durch das Lösen einer anderen Aufgabe nicht **verändern** darf. Damit ist gemeint, dass die Aufgaben nicht aufeinander aufbauen dürfen. Es darf zum Beispiel nicht vorkommen, dass man aufgrund von einer nicht gelösten Aufgabe, bei anderen Aufgaben eine Lösungswahrscheinlichkeit von 0 erhält.

Die Unabhängigkeit der Personen, die auch gelten muss, bedeutet dass die Lösungswahrscheinlichkeit einer Person für eine Aufgabe nicht von der Lösungswahrscheinlichkeit einer anderen person abhängen darf. Diese Annahme wäre verletzt, wenn die Testpersonen voneinander abschreiben würden.

Der Zusatz lokale stochastische Unabhängigkeit besagt außerdem, dass die Unabhängigkeit der Aufgaben nur gelten muss, solange man eine Person (oder mehrere Personen mit der gleichen Fähigkeit) betrachtet. Das bedeutet, dass eine Person mit höherer Fähigkeit eine höhere Lösungswahrscheinlichkeit bei den Aufgaben haben darf als eine Person mit niedriger Fähigkeit.

2.4.3 Spezifische Objektivitaet

Die spezifische Objektivität, die auch oft als „Stichprobenunabhängigkeit „bezeichnet wird, gewährleistet, dass Aussagen über die Fähigkeiten der Personen nicht davon abhängen, anhand welcher Aufgabe sie verglichen werden. Falls Person b eine höhere Fähigkeit als Person a hat, dann muss Person b immer eine höhere Lösungswahrscheinlichkeit als Person a haben, egal welche Aufgabe für den Vergleich verwendet wird.

Gleichzeitig muss die spezifische Objektivität auch für den Vergleich von Aufgaben gelten, unabhängig von der Wahl der Testpersonen. Leichtere Aufgaben müssen für alle Personen einfacher zu lösen sein als schwierigere Aufgaben.

In Abbildung 3 erkennt man, dass diese Eigenschaft durch den parallelen Verlauf der ICCs gewährleistet wird. Die Kurven schneiden sich nicht und sind streng monoton steigend. Somit sind leichtere Aufgaben weiter links verschoben und haben für alle Personen eine höhere Lösungswahrscheinlichkeit als schwierigere Aufgaben.

Das Verhältnis der Lösungswahrscheinlichkeiten von zwei Personen a und b für die zwei Aufgaben j und k kann man an der Multiplikationsbedingung ablesen:

$$\frac{\dfrac{P(u_{aj}=1|\theta_a,\beta_j)}{1-P(u_{aj}=1|\theta_a,\beta_j)}}{\dfrac{P(u_{bj}=1|\theta_b,\beta_j)}{1-P(u_{bj}=1|\theta_b,\beta_j)}} = \frac{\dfrac{P(u_{ak}=1|\theta_a,\beta_k)}{1-P(u_{ak}=1|\theta_a,\beta_k)}}{\dfrac{P(u_{bk}=1|\theta_b,\beta_k)}{1-P(u_{bk}=1|\theta_b,\beta_k)}}$$

Dabei bezeichnet man das Verhältnis der Lösungswahrscheinlichkeit und Gegenwahrscheinlichkeit als “Odds”oder Wettchancen:

$$\frac{P(u_{aj}=1|\theta_a,\beta_j)}{1-P(u_{aj}=1|\theta_a,\beta_j)} = \frac{P(u_{aj}=1|\theta_a,\beta_j)}{P(u_{aj}=0|\theta_a,\beta_j)} = \frac{\frac{e^{\theta_a-\beta_j}}{1+e^{\theta_a-\beta_j}}}{\frac{1}{1+e^{\theta_a-\beta_j}}} = e^{\theta_a-\beta_j}$$

Dementsprechend ergibt sich für den Vergleich der Wettchancen von Person a und b anhand von Aufgabe j:

$$\frac{\frac{P(u_{aj}=1|\theta_a,\beta_j)}{1-P(u_{aj}=1|\theta_a,\beta_j)}}{\frac{P(u_{bj}=1|\theta_b,\beta_j)}{1-P(u_{bj}=1|\theta_b,\beta_j)}} = \frac{e^{\theta_a-\beta_j}}{e^{\theta_b-\beta_j}} = \frac{e^{\theta_a}}{e^{\theta_b}} = e^{\theta_a-\theta_b}$$

Für den Vergleich anhand von Aufgabe k ergibt sich genauso:

$$\frac{\frac{P(u_{ak}=1|\theta_a,\beta_k)}{1-P(u_{ak}=1|\theta_a,\beta_k)}}{\frac{P(u_{bk}=1|\theta_b,\beta_k)}{1-P(u_{bk}=1|\theta_b,\beta_k)}} = e^{\theta_a-\theta_b}$$

Man sieht, dass sich bei beiden Seiten die Aufgabenparameter rauskürzen und das Ergebnis nur noch von den Personenparametern abhängt. Die Wettchancen von Personen a und b sind somit unabhängig von den Aufgaben.

Wenn sich eine Aufgabe für unterschiedliche Personen-Gruppen mit gleicher Fähigkeit als unterschiedlich schwer heraus stellt, spricht man von Differential Item Functioning (DIF). Dies kann bei Textaufgaben in der Mathematik vorkommen, die Schüler mit Deutsch als Fremdsprache benachteiligen. Eine Aufgabe mit DIF ist für den Vergleich von Personen-Gruppen ungeeignet und sollte modifiziert oder entfernt werden.

2.4.4 Eindimensionalitaet

Bei dem Rasch-Modell setzt man Eindimensionalität zugrunde. Dies bedeutet, dass man nur ein latentes Merkmal messen will. Bei einem Mathematik-Test soll nur die mathematische Fähigkeit gemessen werden. Die Verletzung der Eindimensionalität lässt sich nicht klar von der DIF trennen.

Es gibt jedoch Modelle die auf Mehrdimensionalität ausgelegt sind.

2.4.5 Messniveau

Bei der Herleitung des Modells ergibt sich auch eine allgemeinere Form:

$$P(U_{ij} = 1|\theta_i, \beta_j) = \frac{e^{(\theta_i - \beta_j)+b}}{1 + e^{(\theta_i - \beta_j)+b}}$$

Diese Darstellung zeigt, dass die latente Skala der Personen-Fähigkeiten und Aufgaben-Schwierigkeiten keinen festen Nullpunkt besitzt, sondern der Nullpunkt er durch die Wahl von b festgelegt wird.

Es gibt auch Darstellungen und Argumentationen, dass das Rasch-Modell nur bis auf Intervallskalennievau eindeutig ist, da man die Einheit der Skala durch einen weiteren Parameter ändern kann und somit auch die Wahl der Einheit willkürlich wäre. Da es sich um eine latente Skala handelt, sind einige Vermutungen nicht überprüfbar.

Man kann jedoch festhalten, dass das Rasch-Modell mindestens intervallskalierte Messungen erlaubt. Es liegt ein metrisches Skalennievau vor mit gleichabständigen Skalenabschnitten, so dass die Messwerte für Berechnungen wie Differenzen und Mittelwertbildung verwendet werden können.

3 Literatur

Strobl, C. (2012). Das Rasch-Modell - Eine verständliche Einführung für Studium und Praxis

Fahrmeier,L., Künstler, R., Pigeot,I., Tutz,G.,(2009). Statistik - Der Weg zur Datenanalyse