Aufgabe 1

Für $a, d \in \mathbb{R}$ ist die arithmetische Folge (rekursiv) definiert als

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} := a_n + d, a_1 := a\,.$$

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass sich jedes Folgenglied a_{n+1} auch schreiben lässt als $a_{n+1} = a + n \cdot d$.

b) Wann ist die Folge (a_n) nach oben beschränkt? Wann ist sie nach unten beschränkt?

Aufgabe 2

Zeigen/Widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Für $|q| < 1$ ist die geometrische Folge $a_n := q^n, n \in \mathbb{N}$ stets nach oben und nach unten beschränkt.

b) Streng monoton fallende Folgen sind stets nach unten beschränkt.

c) Beschränkte Folgen sind monoton.

Aufgabe 3

Für ein $\varepsilon > 0$ wird die Menge $\{x \mid |x - a| < \varepsilon\} = \{x \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$ auch als ε-Umgebung um a bezeichnet.

Finden Sie für jede der folgenden Begriffsbildungen a)- d) der Vorlesung eine verbale Beschreibung aus den untenstehenden Vorgaben 1)- 5), die die entsprechende Begriffsbildung eindeutig charakterisiert.

a) Die Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert a.

b) Die Folge (a_n) konvergiert nicht gegen den Grenzwert a.

c) Die Folge (a_n) besitzt den Häufungspunkt a.

d) Die reelle Zahl a ist kein Häufungspunkt der Folge (a_n).

1. Es gibt eine ε-Umgebung um a, in der nur endlich viele Glieder der Folge (a_n) liegen.
2. In jeder ε-Umgebung liegen **schließlich** alle Glieder der Folge (a_n).
3. In jeder ε-Umgebung um a liegen immer wieder Glieder der Folge (a_n).
4. In jeder ε-Umgebung um a liegen unendlich viele Glieder der Folge (a_n).
5. Es gibt eine ε-Umgebung um a, außerhalb derer immer wieder Glieder der Folge (a_n) liegen.

Aufgabe 4

a) Für welche Werte d ist die arithmetische Folge $(a_n) := a_1 + (n - 1) \cdot d$ konvergent?

b) Für welche q ist die geometrische Folge $(a_n) := a_1 \cdot q^{n-1}$ konvergent?