Aufgabe 1

Besitzen die Folgen jeweils obere/untere Schranke bzw. Supremum/Infimum? Gibt es jeweils Maximum/Minimum? Sind die Folgen (streng) monoton wachsend, oder (streng) monoton fallend?

- $(a_n) := 2n$
- $(b_n) := \frac{1}{n}$
- $(c_n) := \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
- $(d_n) := (-n)^n$

Geben Sie für die folgenden Teilfolgen jeweils die ersten vier Folgenglieder an.

- $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = 2k$
- $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = k^2$
- $(d_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = 2k+1$

Aufgabe 2

Für $a, d \in \mathbb{R}$ ist die arithmetische Folge (rekursiv) definiert als

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} := a_n + d, a_1 := a\,.$$

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass sich jedes Folgenglied a_{n+1} auch schreiben lässt als $a_{n+1} = a + n \cdot d$.

b) Wann ist die Folge (a_n) nach oben beschränkt? Wann ist sie nach unten beschränkt?

Zeigen/Widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Für $|q| < 1$ ist die geometrische Folge $a_n := q^n, n \in \mathbb{N}$ stets nach oben und nach unten beschränkt. **Hinweis:** Sie können die Ergebnisse aus Aufgabe 3 benutzen

b) Streng monoton fallende Folgen sind stets nach unten beschränkt.

c) Beschränkte Folgen sind monoton.

Aufgabe 3

Die bekannte Betragsfunktion

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto |x| := \operatorname{sign}(x)\cdot x = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

hat u.a. folgende Eigenschaften:

(i) $\forall a \in \mathbb{R} : |a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(ii) $\forall a \in \mathbb{R} : |a| \geq a$

(iii) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : |a\cdot b| = |a|\cdot|b|$ (Multiplikativität)

(iv) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : |a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ auch gilt

a) $|\prod_{i=1}^n a_i| = \prod_{i=1}^n |a_i|$ und

b) $|\sum_{i=1}^n a_i| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$.

Zusatz: Sei nun $\epsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie folgende Äquivalenzen:

c) $|x| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < x < \epsilon$ und

d) $|x - x_0| < \epsilon \Leftrightarrow x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$.