Marco Cattaneo, Georg Schollmeyer

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad n \in \mathbb{N}$
2. $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
3. $n^2 - 1$ ist durch 8 teilbar für ungerades $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die folgende Funktionalgleichung[1] erfülle:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \qquad f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(x^n) = n \cdot f(x)$.
2. Zeigen Sie $f(1) = 0$.

Zusatzaufgabe

Was ist am folgenden 'Beweis' durch vollständige Induktion falsch?[2]

„If you know how to prove things by induction, then here is an amazing fact:

Theorem. All horses are the same color.

Proof. We'll induct on the number of horses. Base case: 1 horse. Clearly with just 1 horse, all horses have the same color.

Now, for the inductive step: we'll show that if it is true for any group of N horses, that all have the same color, then it is true for any group of N+1 horses.

Well, given any set of N+1 horses, if you exclude the last horse, you get a set of N horses. By the inductive step these N horses all have the same color. But by excluding the first horse in the pack of $N + 1$ horses, you can conclude that the last N horses also have the same color. Therefore all $N + 1$ horses have the same color. QED. "

---

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Funktionalgleichung

[2] aus Su, Francis E., et al. „All Horses are the Same Color." Math Fun Facts. <http://www.math.hmc.edu/funfacts>.