Aufgabe 1

Überlegen Sie sich, wie man eine Abbildung formal mengentheoretisch definieren könnte. Überlegen Sie sich dazu insbesondere, welche Bestandteile der Abbildung explizit mit berücksichtigt werden müssen.

Aufgabe 2

Seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \\ g &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \\ h &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y. \end{aligned}$$

Berechnen Sie:

1. $f([0,1])$
2. $f^{-1}([0,1])$
3. $g^{-1}([0,1])$
4. $h^{-1}(\{0\})$
5. $h^{-1}(h(\{(1,2)\}))$.

Aufgabe 3

Es seien folgende Funktionen gegeben:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} &\quad : \quad x \mapsto x^2 \\ g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty[&\quad : \quad x \mapsto x^2 \\ h : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} &\quad : \quad x \mapsto \sqrt{x} \\ i : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[&\quad : \quad x \mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

1. Welche der Funktionen sind Bijektionen?
2. Ermitteln Sie, falls möglich, die folgenden Kompositionen:
   (a) $h \circ f$
   (b) $h \circ g$
   (c) $g \circ h$.

Aufgabe 4

Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

1. f ist surjektiv, falls es eine Abbildung $\varphi : B \longrightarrow A$ gibt mit $f \circ \varphi = id_B$, d.h., es gilt: $\forall b \in B : f(\varphi(b)) = b$.
2. f ist injektiv, falls es eine Abbildung $\psi : B \longrightarrow A$ gibt mit $\psi \circ f = id_A$.
3. Sind f und g Bijektionen, so ist die Komposition $g \circ f$ ebenfalls eine Bijektion.
4. Sind f und g Bijektionen, so gilt für die Umkehrfunktion der Komposition: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.