Übungsblatt 12

In der letzten Übung können Sie zum behandelten Stoff noch einmal Fragen stellen. Nach Möglichkeit können Sie diese gerne vorab demjenigen Übungsleiter per Email senden, dessen Übungsgruppe Sie besuchen.

Aufgabe 1: Betrachten Sie für $a, b > 0$ die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \ln(x \cdot y) - ax - by^2\,.$$

a) Finden Sie das Maximum von f.

b) Finden Sie jeweils das Maximum für die Funktionen $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x) - ax$ und $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \ln(y) - by^2$.

c) Vergleichen Sie das Maximum von f mit den Maximalstellen von g und h. *Ist der gefundene Zusammenhang zufällig oder können Sie ihn begründen?*[1]

d) Berechnen Sie für f alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung (auch die gemischten).

e) *Können Sie für diese Funktion f zeigen, dass es sich bei den Werten aus a) tatsächlich um ein Maximum handelt, ohne auf die partiellen gemischten Ableitungen zurückzugreifen?*[1]

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die folgende Matrix positiv definit ist:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:

a) Sind konvergente Folgen nach oben beschränkt?

b) Konstruieren Sie eine Folge (a_n), die gegen den Grenzwert 1 konvergiert und skizzieren sie diese Folge inklusive einer selbst gewählten ε-Umgebung um den Grenzwert 1.

Aufgabe 4: *Für $\alpha, \beta, c, c' > 0$ und $c \neq c'$ seien I_c und $I_{c'}$ zwei Isolinien zur Funktion $F(x, y) = x^\alpha y^\beta$. Berechnen Sie den relativen vertikalen Abstand zwischen I_c und $I_{c'}$. Für einen festen (aber beliebigen) x-Wert ist also zu berechnen, um welchen Faktor das zu x zugehörige y_c (auf I_c) größer ist als das zu x zugehörige $y_{c'}$ (auf $I_{c'}$). Machen Sie sich die Situation vorab grafisch klar.*[1]

[1]**Bemerkung:** Die kursiv gesetzten Aufgaben sind anspruchsvoller und Sie müssen sie vor der Übung nicht alleine lösen können. Es lohnt sich natürlich trotzdem, darüber nachzudenken.

Zusatzaufgaben (Lösungen am Seitenende)[2]

Zusatzaufgabe I: Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen, ob sie homogen sind und wenn ja, von welchem Grad. Geben Sie, wenn möglich auch an, ob es sich um steigende, konstante oder fallende Skalenerträge handelt.

a) $f(x, y, w) = (x + y) \cdot w$

b) $g(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

Zusatzaufgabe II: Lösen Sie die nachstehende Optimierungsaufgabe unter Nebenbedingungen mit Hilfe der Substitution- und der Lagrangemethode:

Zielfunktion:	$U(x_1, x_2) = x_1 x_2 + 2x_1 \rightarrow \max$
u.d. Nebenbedingung:	$4x_1 + 2x_2 = 60$

Zusatzaufgabe III: Lösen Sie die nachstehende Optimierungsaufgabe unter Nebenbedingungen mit Hilfe der Substitution- und der Lagrangemethode:

Zielfunktion:	$f(x, y) = x \cdot y \rightarrow \max$
u.d. Nebenbedingung:	$x + y = 6$

Zusatzaufgabe IV: Finden Sie das Extremum von $f(x, y) = x^2 + y^2$ mit Hilfe der Substitution- und der Lagrangemethode unter der Nebenbedingung $x + 4y = 2$.

[2] *Ergebnisse:* I: f hat Grad 2, g hat Grad 1, II: $(x_1^{\text{opt}}, x_2^{\text{opt}}) = (8, 14)$, III: $(x^{\text{opt}}, y^{\text{opt}}) = (3, 3)$, IV: $(x^{\text{opt}}, y^{\text{opt}}) = (\frac{2}{17}, \frac{8}{17})$.