Übungsblatt 10

Aufgabe 1: Der Nutzen einer Konsumentin bzgl. zwei Gütern x und y, deren Preise $p_x = 2$ und $p_y = 3$ Geldeinheiten betragen, lasse sich durch die Nutzenfunktion $u(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}$ darstellen. Dabei ist darauf zu achten, dass als verfügbares Budget 80 Geldeinheiten zur Verfügung stehen.

a) Stellen Sie das zugehörige Optimierungsproblem auf.

b) Lösen Sie das Nutzenmaximierungsproblem unter Nebenbedingungen mit der Substitutionsmethode.

c) Lösen Sie das Problem mit der Lagrangemethode.

Aufgabe 2: Nehmen Sie an, die Punktezahl, die Sie in einer Mathematikklausur erreichen, lasse sich angeben durch die Funktion $p(x, y) = 0.5xy + 2y$, wobei x die Anzahl der Stunden, die Sie vor der Klausur zum Entspannen nützen und y die Anzahl der Stunden, die Sie zur Vorbereitung auf die Klausur nützen, angeben. Bis zur Klausur haben Sie noch 20 Stunden Zeit.

a) Wie viele Punkte erreichen Sie, wenn Sie die gesamte Zeit vor der Klausur lernen?

b) Wie müssen Sie die verbleibende Zeit auf Erholung und Vorbereitung verteilen, um ein möglichst gutes Klausurergebnis zu erzielen? Stellen Sie hierzu erst das zugehörige Optimierungsproblem auf und finden Sie dann die Lösung mit Substitutions- und mit Lagrangemethode.

Aufgabe 3: Ein Unternehmen stellt aus zwei Inputfaktoren x und y, welche 5 bzw. 10 Geldeinheiten kosten, ein Gut gemäß der Produktionsfunktion $x^{0.5}y^{0.5}$ her. Für einen Auftrag muss es 20 Einheiten des Gutes produzieren und möchte nun diejenige Kombination der Inputfaktoren finden, die die Kosten dieses Auftrags minimieren.
Stellen Sie das zugehörige Optimierungsproblem auf und finden Sie das Optimum mit dem Verfahren von Lagrange.

Zusatzaufgabe I: Maximieren Sie die Funktion $x \cdot y$ unter der Nebenbedingung $1 - 2(x + y) + 2xy = 0$ mit der Substitutions- und mit der Lagrangemethode.

Zusatzaufgabe II: Ein bestimmtes Glas können Sie aus x Mengeneinheiten Kalk, der pro Mengeneinheit 2 Geldeinheiten kostet, und y Mengeneinheiten Sand, der pro Mengeneinheit 3 Geldeinheiten kostet, herstellen. Wie viele Einheiten Kalk bzw. Sand müssen Sie verwenden, um zu möglichst niedrigen Kosten 100 Mengeneinheiten Glas zu produzieren, wenn die Produktionsfunktion $g(x, y) = 10\sqrt{x \cdot y}$ gilt? Bestimmen Sie die Lösung mit Substitutions- und Lagrangemethode.

Zusatzaufgabe III: Minimieren Sie die Funktion $x^3 + y^3$ unter der Nebenbedingung $x + 2y = 10$ mit der Substitutions- und mit der Lagrangemethode.

Zusatzaufgabe IV, Wiederholung: Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:
$\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.