

Aufgabe 12

Beweisen Sie Proposition 2.73!

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ bzw. $(\mathbb{A}, \Theta, l(\cdot))$ mit $\mathbb{A} < \infty$ und $|\Theta| < \infty$ und die Priori-Bewertung $\pi(\cdot)$. Eine Aktion a^* ist genau dann Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$, wenn a^* Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ im induzierten Regret-Problem ist.

Aufgabe 13

Gegeben sei das Investitionsproblem (vgl. das Beispiel aus Abschnitt 1.3.4

	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3
a_1	10000	2000	-15000
a_2	1000	1000	0

und eine Experteneinschätzung in Form einer ordinalen Wahrscheinlichkeit, d.h. der Experte ordnet nur die Umweltzustände nach der Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens. Gegeben sei die Credalmenge

$$\mathcal{M} = \{\pi(\cdot) | \pi(\{\vartheta_1\}) \geq \pi(\{\vartheta_2\}) \geq \pi(\{\vartheta_3\})\}.$$

Berechnen Sie die Max E Min-Aktion!

Aufgabe 14

Man bestimme in folgenden Situationen unter Verwendung von Satz 3.15 jeweils eine konjugierte Priori-Verteilung:

- X_1, \dots, X_n ist i.i.d. normalverteilt mit unbekanntem μ und bekannter Varianz σ^2
- X ist binomialverteilt zum unbekanntem Parameter p
- X_1, \dots, X_n ist i.i.d. Poisson-verteilt mit Parameter λ .

Aufgabe 15

Ist $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ eine i.i.d. Stichprobe eines mit den Parametern μ und σ^2 normalverteilten Untersuchungsmerkmals, so gilt:

Ist σ^2 bekannt und wählt man als priori Verteilung für μ eine Normalverteilung mit den Parametern ν und ρ^2 , so ist die a posteriori Verteilung $\pi(\mu | \vec{x})$ eine Normalverteilung mit den Parametern ν' und $\rho^{2'}$ mit

$$\nu' = \frac{\bar{x}\rho^2 + \nu \frac{\sigma^2}{n}}{\rho^2 + \frac{\sigma^2}{n}} \quad (0.1)$$

und

$$\rho^{2'} = \frac{\rho^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n}}{\rho^2 + \frac{\sigma^2}{n}} \quad (0.2)$$

- a) Zeigen Sie, dass man den MPD-Schätzer als gewogenes Mittel aus dem Stichprobenmittel und dem Mittelwert der Priori-Verteilung schreiben kann!
- b) Führen Sie eine ceteris-paribus-Analyse der dabei auftretenden Größen durch und diskutieren Sie ihre Ergebnisse inhaltlich!
- c) Betrachten Sie nun den Fall $\varrho^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. Welche Posteriori-Verteilung würde man bei
- i) $\bar{x} = 0.9$ und $\nu = 1.1$ und
 - ii) $\bar{x} = -100$ und $\nu = 102$
- erhalten? Diskutieren Sie ihr Ergebnis!

Aufgabe 16

Betrachtet werde wiederum das Investitionsproblem (vgl. Bsp. in Abschnitt 1.3.4 und Bsp. 1.57).

Datenfreies Entscheidungsproblem				Informationsstruktur			
	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3		x_1	x_2	x_3
a_1	10 000	2 000	-15 000	ϑ_1	0.6	0.3	0.1
a_2	1 000	1 000	0	ϑ_2	0.2	0.4	0.4
				ϑ_3	0.1	0.4	0.5

Man ermittle die optimale Entscheidungsfunktion nach dem Laplace-Kriterium direkt über das Auswertungsproblem und mit Hilfe des Hauptsatzes der Bayes-Entscheidungstheorie.