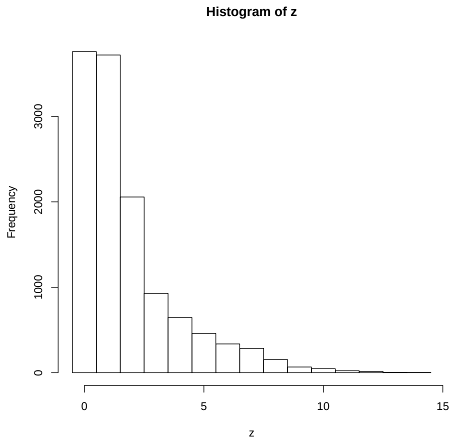
Aufgabe 4

Zeigen Sie: Sind zwei Mengen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ konvex, so ist auch ihr Durchschnitt $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ konvex. Was lässt sich über die Vereinigung $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ sagen?

Aufgabe 5

Betrachtet werde das folgende (durch Simulation gewonnene) Histogramm, das Auskunft über die Verteilung der Anzahl an Schadensfällen pro Versichertem geben möge (N=12500). Unter der Annahme, dass die Daten i.i.d. Poisson-verteilt sind, wird der Erwartungswert geschätzt; man erhält $\hat{\lambda} = 1.7830$. Sicherheitshalber wird auch noch die Stichprobenvarianz s^2 berechnet; das Ergebnis ist 4.3056. Wie erklären Sie sich diese Diskrepanz?



Aufgabe 6 (Mengen von Wahrscheinlichkeiten)

Sei (Ω, Σ) ein Messraum mit $|\Omega| = 3$.

(a) Stellen Sie $\mathcal{P}$, die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω, Σ), graphisch dar.

(b) Beschreiben Sie die Menge $\mathcal{P}$ mithilfe der Punkte $P_1 = (1, 0, 0)'$, $P_2 = (0, 1, 0)'$ und $P_3 = (0, 0, 1)'$. Ist $\mathcal{P}$ konvex?

Aufgabe 7 (Mischverteilung vs. Summe von Zufallsgrößen)

Betrachtet werden die beiden Normalverteilungen $N(0, 1)$ und $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ sowie zwei Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 mit $Y_1 \sim N(0, 1)$ und $Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.
Sei Z_κ eine Zufallsvariable mit derjenigen Verteilung, die sich aus der Mischung der beiden Verteilungen im Verhältnis κ, $1 - \kappa$ ergibt und $Y_\kappa := \kappa \cdot Y_1 + (1 - \kappa) \cdot Y_2$.

(a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Z_κ und Y_κ?

(b) Bestimmen Sie die Dichte, den Erwartungswert und die Varianz von Z_κ.