2.2 Bayes-Aktionen

2.2.1 Entscheiden in der Risikosituation

Bsp. 2.35 (Beispiel: Lotterie vgl. Bsp. in Abschnitt 1.3.2)

Urne mit g
(hier: 50) grünen, b (30) blauen und r (20) restlichen Kugeln.
Man kann

a_1 nicht spielen
a_2 zum Preis von 20 auf Grün setzen
a_3 zum Preis von 10 auf Blau setzen

Nur einmaliger, zufälliger Zug aus der Urne, man erhält 100 Euro bei Treffer:

	grün	blau	rest	Min
a_1	0	0	0	0
a_2	80	-20	-20	-20
a_3	-10	90	-10	-10

Wie würden Sie sich entscheiden?

Def. 2.36

Gegeben seien

- ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ in Nutzenform
- eine σ-Algebra $\sigma(\Theta)$ über Θ, die alle Einpunktmengen $\{\vartheta\}$ enthält.
- Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\pi(\cdot)$ über $(\Theta, \sigma(\Theta))$.

Dann heißt für jedes $a \in \mathbb{A}$

$$\mathbb{E}_\pi(u(a)) := \int_\Theta u(a, \vartheta) \, \mathrm{d}\pi(\vartheta) \tag{2.7}$$

der *Erwartungsnutzen* von a.

Bem. 2.37

- $u(a, \cdot)$ ist nun sozusagen eine Zufallsgröße $u(a)$!
  Ein Zufallsexperiment determiniert ϑ, damit also auch den konkret sich einstellenden Nutzen
  $$u(a): \begin{array}{l} \Theta \to \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad (\Theta, \sigma(\Theta)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ \vartheta \mapsto u(a)(\vartheta) := u(a, \vartheta) \end{array}$$

- Zu (2.7) sei nochmals an die Definition des allgemeinen Maßintegral erinnert. Insbesondere gilt wiederum

  * $\pi(\cdot)$ stetig mit Dichte $f(\cdot)$, dann

$$\mathbb{E}(u(a)) = \int_{\Theta} u(a,\vartheta) f(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta$$

  * $\pi(\cdot)$ diskret mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $\pi(\{\vartheta\})_{\vartheta\in\Theta}$

$$\mathbb{E}(u(a)) = \sum_{\vartheta\in\Theta} u(a,\vartheta)\pi(\{\vartheta\})$$

Def. 2.38 (Bernoullikriterium)

In der Situation von Def. 2.41 wähle man

$$\begin{aligned} \Phi(\cdot,\pi) : \mathbb{A} &\to \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \Phi(a,\pi) = \mathbb{E}_\pi(u(a)) \end{aligned}$$

als Kriteriumsfunktion!

Bem. 2.40

Gerade bei diesem Kriterium ist es absolut essentiell, sich daran zu erinnern, dass der Nutzen nicht notwendig linear in den Geldbeträgen ist.

Bem. 2.42 (Einbeziehen der Varianz)

V. a. bei wirtschaftlichen Anwendungen wird manchmal ergänzend die Varianz von $u(a, \cdot)$ (oder ein anderes Risikomaß) mit einbezogen; man spricht dann von (μ, σ)-Kriterien (μ Mittelwert, σ^2 Varianz).

Dies kann auf zwei Arten geschehen:

1) *Zweistufige* (μ, σ)*-Kriterien* (um zwischen Aktionen mit gleichen Erwartungswerten zu differenzieren), also etwa:

$$\widetilde{\Phi} : \mathbb{A} \to \begin{pmatrix} \mathbb{E}_\Pi \, u(a) \\ \mathbb{V}_\Pi \, u(a) \end{pmatrix}$$

im Sinne der lexikographischen Ordnung (bzgl. $-v$), also

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}(a) &> \widetilde{\Phi}(a') \quad \Longleftrightarrow \\ \mathbb{E}_\pi(u(a)) &> \mathbb{E}_\pi(u(a')) \text{ oder} \\ \mathbb{E}_\pi(u(a)) &= \mathbb{E}_\pi(u(a')) \text{ und } \mathbb{V}_\pi(u(a)) < \mathbb{V}_\pi(u(a')) \end{aligned}$$

2) *einstufige* (μ, σ)-*Kriterien* mit der Kriteriumsfunktion

$$\Phi(a) = \mathbb{E}_\pi(u(a)) - c \cdot \sqrt{\mathbb{V}_\pi(u(a))}$$

$c > 0$ (üblich): risikoavers, eventuell aber auch $c < 0$: risikofreundlich (z.B. Glücksspiel).

2.2.2 Grundlagen der Bayesianischen Ansätze

Bem. 2.43 (Bayesianisches / Subjektivistisches Paradigma)

Jede Situation unter Unsicherheit kann durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi(\cdot))$ beschrieben werden.

Im Kontext eines Entscheidungsproblems heißt die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(\cdot)$ über $(\Theta, \sigma(\Theta))$ *(a) priori-Verteilung* (Verteilung „vor den Daten“) (zu $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$).

2.2.3 Bayes-Aktionen: Definition, Bestimmung und wichtige Eigenschaften

Def. 2.44 (Bayes-Aktion)

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$.

a) Ist $\pi(\cdot)$ eine apriori-Verteilung zu $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$, so heißt
$\Phi(\cdot, \pi) : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$

$$a \longmapsto \Phi(a, \pi) = \mathbb{E}_\pi(u(a)) = \int_\Theta u(a, \vartheta)\; d\pi(\vartheta)$$

Bayes-Kriterium zu $\pi(\cdot)$ und jede bezüglich dieses Kriteriums optimale Aktion a^* *Bayes-Aktion bezüglich* $\pi(\cdot)$.

$$B(\pi) := \Phi(a^*, \pi)$$

heißt *Bayes Nutzen bezüglich* $\pi(\cdot)$

b) Eine Aktion a^{**} heißt *Bayes-Aktion (schlechthin)*, wenn es eine priori Bewertung $\pi^{**}(\cdot)$ zu $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ gibt, so dass a^{**} Bayes Aktion bezüglich $\pi^{**}(\cdot)$ ist.

Bem. 2.45

Beachte: „Rein mathematisch“ besteht kein Unterschied zum Bernoullikriterium; semantisch handelt es sich aber bei der Wahrscheinlichkeitsbewertung der Zustände um ein anderes Objekt, nämlich um eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung.

Bem. 2.46

- Es ist einfach, Beispiele zu finden, bei denen alle Aktionen eines Entscheidungsproblems Bayes-Aktionen sein können. Vorwurf der Beliebigkeit.

- Hinweis auf das sog. Bayes-Umkehrproblem (Bem. 2.58): Zu welcher Aktion gibt es eine Priori-Bewertung, bezüglich derer die jeweilige Aktion Bayes-Aktion ist?

Bem. 2.48 (Der Bayes-Nutzen randomisierter Aktionen)

Für radomisierte Aktionen $\tilde{a}$ ist unter schwachen Regularitätsbedingungen (Anwendbarkeit des Satzes von Fubini)

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{a},\pi) = \mathbb{E}_\pi(u(\tilde{a})) &= \int_\Theta u(\tilde{a},\vartheta)d\pi(\vartheta) \\
&= \int_\Theta \left(\int_{\mathbb{A}_0} u(a,\vartheta)d\tilde{a}(a)\right) d\pi(\vartheta) \qquad (2.8) \\
&= \int_{\mathbb{A}_0} \left(\int_\vartheta u(a,\vartheta)d\pi(\vartheta)\right) d\tilde{a}(a) \\
&= \int_{\mathbb{A}_0} \Phi\left(a,\pi\right) d\tilde{a}(a)
\end{aligned}$$

$$(2.9)$$

Proposition 2.50 (Berechnung von Bayes-Aktionen über lineare Optimierung bei endlichem Θ und endlichem $\mathbb{A}$)

Graphische Lösung bei $|\Theta| = 2$. Betrachte Höhenlinien der Form $x_1 \cdot \Pi(\{\vartheta_1\}) + x_2(T(\{\vartheta_2\})) = c$, und diese dann an die Aktionenmenge ranschieben; soweit bis x_1, x_2 die Restriktionen erfüllen, also Elemente aus $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ repräsentieren.

Bem. 2.53 (Bayes-Umkehrproblem bei endlichem Θund endlichem

Es soll die Menge Π_a aller apriori Verteilungen angegeben werden, für die eine *gegebene Aktion a* Bayes-Aktion in $\mathbb{A}$ ist.

2.2.4 Wichtige Sätze über Bayes-Aktionen

Im folgenden $|\Theta| < \infty$, also endliche Zustandsmengen.
Viele Sätze gelten unter geeigneten Zusatzvorraussetzungen mutatis mutandis auch für unendliche Zustandsräume.
($\mathbb{A}$ nicht notwendig als endlich vorausgesetzt, da man ja auch $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ betrachten will.)

a) Entbehrlichkeit randomisierter Aktionen

Satz 2.54 (Entbehrlichkeit randomisierter Aktionen)

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathcal{M}(\mathbb{A}_0), \Theta, \tilde{u}(\cdot))$, das die gemischte Erweiterung eines Entscheidungsproblems $(\mathbb{A}_0, \Theta, u(\cdot))$ mit endlicher Aktionenmenge $\mathbb{A}_0$ darstellt. Dann gilt für jede apriori-Verteilung $\pi(\cdot)$:
Ist $\widetilde{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ Bayes-Aktion zur Bewertung $\pi(\cdot)$, so gibt es auch eine reine Aktion $a \in \mathbb{A}_0$, die Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ in $\mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$ ist.

Korollar 2.55

In der Situation von Satz 2.59 gilt für jede apriori-Verteilung $\pi(\cdot)$:
Bayes-Aktionen zu $\pi(\cdot)$ in $\mathbb{A}_0$ bleiben Bayes-Aktionen zu $\pi(\cdot)$ beim Übergang zu $\mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$.

Beweis des Korollars:
Angenommen a_0^* sei eine Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ zu $\pi(\cdot)$ in $\mathbb{A}_0$, aber nicht Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ in $\mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$. Dann gibt es ein $\widetilde{a}^* \in \mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$ mit

$$\Phi(\widetilde{a}^*, \pi) > \Phi(a_0^*, \pi). \tag{2.10}$$

Wegen Satz 2.59 gibt es dann eine reine Aktion $a^* \in \mathbb{A}_0$, so dass auch a^* Bayes-Aktion in $\mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$ ist.
D.h. $\Phi(\widetilde{a}^*, \pi) = \Phi(a^*, \pi)$. Wegen (2.10) ist damit

$$\Phi(a^*, \pi) > \Phi(a_0^*, \pi).$$

Beachte, dass $a^* \in \mathbb{A}_0$; also ist a_0^* nicht Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ in $\mathbb{A}_0$. Widerspruch!

(Die Menge der reinen Bayes-Aktionen bildet so etwas wie eine wesentlich minimal vollständige Klasse bezüglich der durch $\Phi(\cdot, \pi)$ induzierten Ordnung)

Interpretation:

Bem. 2.56 (Zum Beweis von Satz 2.51)

(Beweis hier auf zwei Arten, inklusive einer **geometrischen Veranschaulichung**)

b) Bayes-Aktionen und Zulässigkeit

Satz 2.57 Zulässigkeit von Bayes-Aktionen zu nicht entarteten apriori-Verteilungen

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ mit apriori Bewertung $\pi(\cdot)$ so, dass $\pi(\{\vartheta_j\}) > 0$ für alle j.
Dann gilt: Jede Bayes-Aktion a^* zu $\pi(\cdot)$ zulässig.

Interpretation:

Proposition 2.58

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$. Ist $a \in \mathbb{A}$ eine zulässige Bayes-Aktion, so ist a auch zulässig im Problem $(\mathcal{M}(\mathbb{A}), \Theta, \tilde{u}(\cdot))$.

Neu ist hier die Aussage für $\pi(\{\vartheta_j\}) = 0$ für manche j. Für $\pi(\{\vartheta_j\}) > 0$ folgt die Aussage bereits aus Korollar 2.60 und Satz 2.62; nach dem Korollar ist a auch Bayes-Aktion in der gemischten Erweiterung, auf die dann Satz 2.62 angewendet werden kann.

Satz 2.59

Betrachtet werde ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$. Ist $\mathbb{A}$ konvex, z.B. $\mathbb{A} = \mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$ für eine geeignete Aktionenmenge $\mathbb{A}_0$, dann gilt: Zu jeder zulässigen Aktion a gibt es eine apriori Verteilung $\pi^a(\cdot)$ mit $\pi^a(\{\vartheta_j\}) > 0$, $j = 1, \ldots, m$, so dass a Bayes-Aktion zur Bewertung $\pi^a(\cdot)$ ist.

Interpretation:

2.2.5 Bayes und Minimax

Def. 2.60 (Ungünstigste apriori-Verteilung)

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$. Eine Verteilung $\pi^-(\cdot)$ über $(\Theta, \sigma(\Theta))$ heißt *ungünstigste apriori Verteilung* für $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$, falls für alle anderen apriori Verteilungen $\pi(\cdot)$ aus der Menge Π aller Verteilungen über $(\Theta, \sigma(\Theta))$ und für die Bayes-Aktion a^- zu $\pi^-(\cdot)$ gilt:

$$\mathbb{E}_{\pi^-} u(a^-) \leq \mathbb{E}_{\pi} u(a^-)$$

Proposition 2.61

Unter sehr schwachen Regularitätsbedigungen gilt in obiger Situation:
$\tilde{a}$ ist Maximin-Aktion.

In Proposition **??** wurde ein Kriterium dafür angegeben, wann eine Äquilisator-Aktion auch Maximin-(Minimax-)Aktion ist.
Bayes-Aktionen liefern ein *stärkeres* Kriterium, das auch *praktisch wichtiger* ist, weil die Feststellung, Bayes-Aktion zu sein, oft leichter zu treffen ist als die Feststellung, zulässige Aktion zu sein.

Proposition 2.62

Eine Äquilisator-Aktion, die zugleich Bayes-Aktion ist, ist auch Maximin-Aktion.

<u>Beweis</u>:
Ist $\pi(\cdot) > 0$, so ist jede Bayes-Aktion zulässig, und der Satz ergibt sich aus Satz 2.62.
Sei nun allgemeiner $\pi(\cdot)$ beliebig und a_B: 1) Bayes-Aktion
2) equalizer-Aktion

Dann gibt es

1) eine Bewertung π, sodass

$$\Phi(a_B, \pi) \geq \Phi(a, \pi) \quad \text{für } \textit{alle } a \in \mathbb{A} \tag{2.11}$$

2) eine Zahl c mit

$$u(a_B, \vartheta_j) = c \quad \text{für } \textit{alle } j = 1, \ldots, m \tag{2.12}$$

Angenommen, a_B wäre *nicht* eine Maximin-Aktion. Dann gäbe es eine Aktion a_M mit

$$\inf_{\Theta} u(a_M, \vartheta_j) > c\,. \tag{2.13}$$

Dann würde folgen

$$
\begin{aligned}
\Phi(a_M, \pi) = \sum_{j=1}^{m} u(a_M, \vartheta_j) \cdot \pi(\{\vartheta_j\}) &\geq \sum_{j=1}^{m} \min_j u(a_M, \vartheta_j) \cdot \pi(\{\vartheta_j\}) \\
> \sum_{j=1}^{m} c \cdot \pi(\{\vartheta_j\}) &= \sum_{j=1}^{m} u(a_B, \vartheta_j) \cdot \pi(\{\vartheta_j\}) = \Phi(a_B, \pi)
\end{aligned}
$$

also

$$\Phi(a_M, \pi) > \Phi(a_B, \pi), \tag{2.14}$$

und a_B wäre keine Bayes-Aktion.
Widerspruch.