

4.3 Bevölkerungsprozessstatistik: Raten und Tafeln

Dynamik der Bevölkerungsstruktur ergibt sich aus

- Zugängen (Geburt, Zuwanderung)
- Abgängen (Tod, Abwanderung)
- Bewegungen zwischen Sektoren (ledig → verheiratet, erwerbstätig → nicht erwerbstätig, verschiedene geographische Regionen)

Beschreibung der Änderungsprozesse durch

- Anzahlen
- Raten (Anzahl bezogen auf Umfang)
- Tafeln (Übersicht über Raten nach Geschlecht und Alter)

4.3.1 Sterberate

Def. 4.1.

Sei $A(t)$ die Anzahl der Abgänge eines bestimmten Typs (nachfolgend Todesfälle) in $(0, t]$. Setzt man, wie durchgängig im Folgenden, $A(t)$ als differenzierbar voraus, so heißt

$$a(t) = \frac{dA(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{(t+h) - t}$$

Abgangsfunktion (Abgangsintensität).

Mit $B(t)$ als Bestand zum Zeitpunkt t , ist die Abgangsrate definiert durch

$$r_{a(t)} = \frac{a(t)}{B(t)}.$$

Operationalisierung der Sterberate:

- Approximation des Differentialquotienten durch den Differenzenquotient für $h = 1$:

$$a(t) \approx \frac{A(t+1) - A(t)}{(t+1) - t} = A(t+1) - A(t) = S(t, t+1)$$

- Operationalisierung des Bevölkerungsbestands als Durchschnittsbestand in $(t, t+1]$:

$$\overline{B}(t, t+1) = \int_t^{t+1} B(u) du$$

- Approximation von $\overline{B}(t, t+1)$ durch

$$\overline{B}(t, t+1) \approx \frac{B(t) + B(t+1)}{2} \approx B\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

Def. 4.2.

Unter Verwendung der obigen Approximationen heißt

$$m(t) = \frac{S(t, t + 1)}{\overline{B}(t, t + 1)} 1\,000$$

(operationale Form der) rohe(n) Sterberate (Sterbeziffer).

Auf Basis dieser Definition lassen sich altersspezifische Sterberaten bestimmen:

$$m_x(t) = \frac{S_x(t, t + 1)}{\overline{B}_x(t, t + 1)} 1\,000, \quad x = 0, 1, \dots, 100.$$

$m(t)$ lässt sich als gewichtetes Mittel der $m_x(t)$ schreiben:

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{S(t, t+1)}{\bar{B}(t, t+1)} = \frac{\sum_{x=0}^{100} S_x(t, t+1)}{\bar{B}(t, t+1)} = \\ &= \sum_{x=0}^{100} \frac{S_x(t, t+1)}{\bar{B}(t, t+1)} \frac{\bar{B}_x(t, t+1)}{\bar{B}_x(t, t+1)} = \\ &= \sum_{x=0}^{100} m_x(t) \underbrace{\frac{\bar{B}_x(t, t+1)}{\bar{B}(t, t+1)}}_{=: g_x(t)} \end{aligned}$$

Die Höhe der rohen Sterberate wird sehr stark durch die Bevölkerungsstruktur beeinflusst. Daher werden für internationale Vergleiche häufig sog. standardisierte rohe Sterberaten verwendet, die auf Gewichten $(g_x^*(t), x = 0, \dots, 100)$ einer Referenzpopulation basieren.

4.3.2 Sterbetafeln

Idee:

- Eine Sterbetafel ist ein demographisches *Modell* für die Sterblichkeitsverhältnisse einer Bevölkerung, die unabhängig von der konkreten Größe und Altersstruktur der Bevölkerung dargestellt werden.
- Es werden u.a. geschlechts- und altersspezifische „Sterbewahrscheinlichkeiten“ dargestellt.
- Sterbetafeln sind prognostisch verwendbar (z.B. zur Prämienkalkulation bei Lebensversicherungen).

- Kohorten- versus Periodensicht:
 - Generationen-/Kohortentafel: bildet den tatsächlichen Sterbeprozess einer bestimmten Kohorte vollständig ab.
 - * z.B. Kohorte von 100 000 Lebendgeborenen eines Geburtsjahrgangs.
 - * Berechnung sehr aufwändig, denn es erfordert die ständige Beobachtung aller Mitglieder der Kohorte bis zum Tod des letzten Mitglieds.
 - * Praktisch basieren Generationentafeln teilweise auf Schätzungen.
 - Perioden-/Querschnittstafel: bildet die aktuellen Sterbeverhältnisse in allen Altersklassen ab.
 - * Meistens werden Periodentafeln verwendet, da sie schnell verfügbar sind.
 - * (Rest-)Lebenserwartung wird unter der Annahme berechnet, dass die altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten konstant bleiben.
 - * Derzeit beziehen sich die Sterbetafeln für Deutschland jeweils auf einen Zeitraum von 3 Jahren.

Aufbau einer Sterbetafel:

- Tabellarische Darstellung der „Abgangsordnung“ eines sich durch Todesfälle ständig reduzierenden Bevölkerungsbestandes.
- Wie viele von z.B. 100 000 $=: \ell_0$ Lebendgeborenen erreichen das Alter x ?
- i.d.R. Periodentafel
- Notation: Das Argument t wird im Folgenden weggelassen.
- Schätzung der Sterbewahrscheinlichkeit durch relative Häufigkeit:

$$q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x},$$

wobei ℓ_x der Anzahl der betrachteten Lebenden im Alter $x = 0, \dots, 100$ entspricht.

Es gilt:

$$q_x = \frac{2 m_x}{2 + m_x} \quad \text{bzw.} \quad m_x = \frac{2 q_x}{2 - q_x}.$$

Sterbetafel 2009/2011

Deutschland

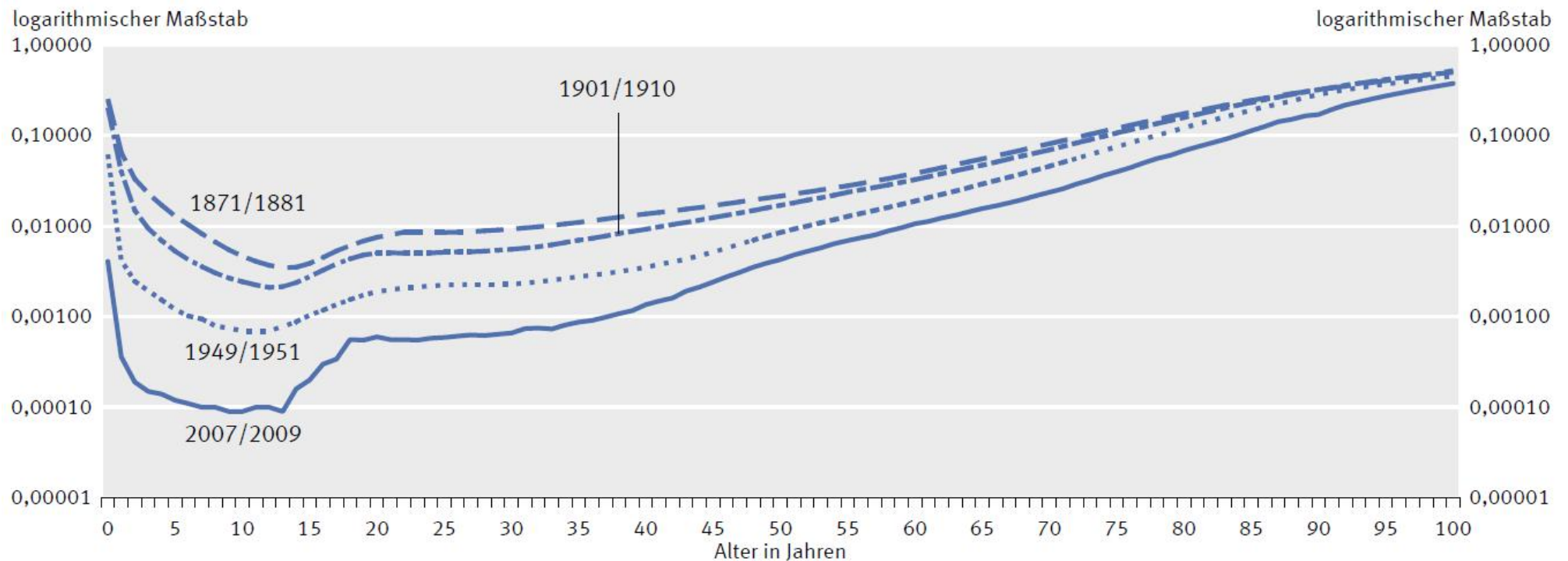
Weiblich^{*)}

Vollendetes Alter	Sterbe- wahrscheinlichkeit vom Alter x bis x+1	Überlebens- wahrscheinlichkeit vom Alter x bis x+1	Überlebende im Alter x	Gestorbene im Alter x bis unter x+1	Von den Überlebenden im Alter x		Durchschnittliche Lebenserwartung im Alter x in Jahren
					bis zum Alter x+1 durchlebte Jahre	insgesamt noch zu durchlebende	
x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	$e_x l_x$	e_x
0	0,00315269	0,99684731	100 000	315	99 736	8 272 549	82,73
1	0,00026396	0,99973604	99 685	26	99 672	8 172 812	81,99
2	0,00014894	0,99985106	99 658	15	99 651	8 073 141	81,01
3	0,00011173	0,99988827	99 644	11	99 638	7 973 490	80,02
4	0,00011918	0,99988082	99 632	12	99 627	7 873 852	79,03
5	0,00010107	0,99989893	99 621	10	99 616	7 774 225	78,04
6	0,00008709	0,99991291	99 610	9	99 606	7 674 610	77,05
7	0,00008583	0,99991417	99 602	9	99 598	7 575 004	76,05
8	0,00007364	0,99992636	99 593	7	99 590	7 475 406	75,06
9	0,00006898	0,99993102	99 586	7	99 583	7 375 816	74,06

(Quelle: Statistisches Bundesamt)

Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeiten für die männliche Bevölkerung in Deutschland seit 1871/1881 (Graphik aus: Eisenmenger & Emmerling (2011))

Männer



- „Tafelfunktionen“:

- Anzahl der Gestorbenen im Alter $x = 0, \dots, 100$:

$$d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$$

- Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit zwischen Alter x und Alter $x + 1$:

$$q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} = 1 - \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{d_x}{\ell_x} \quad \text{bzw.} \quad p_x = 1 - q_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$$

- Anzahl der von den Überlebenden im Alter x bis zum Alter $x + 1$ durchlebten Personenjahre:

$$L_x = \ell_{x+1} + \frac{1}{2} d_x = \frac{1}{2} (\ell_x + \ell_{x+1})$$

- Anzahl der von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebenden Jahre:

$$T_x = \sum_{y=x}^{100} L_y$$

- durchschnittliche Restlebenserwartung der Überlebenden im Alter x :

$$e_x = \frac{T_x}{\ell_x}$$

Praktische Schätzung von Sterbewahrscheinlichkeiten:

- Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner: alle Sterbefälle eines Geburtsjahrganges, jedoch mit unterschiedlichen Gewichten
- Sterbejahrmethode von Raths: Sterbefälle eines Jahres, also auf zwei Geburtsjahrgänge bezogen
- Sterberatenmethode nach Farr: zunächst Schätzung altersspezifischer Sterberaten, die über die obige Formel in Sterbewahrscheinlichkeiten umgerechnet werden
- Die Schätzungen der Sterbewahrscheinlichkeiten werden in der Praxis meist noch (z.B. durch Splines) geglättet.