Schulen statistischer Inferenz

Fisher's Fiduzialargument

Matthias Mittermayer

betreut durch Frau Dr. Dr. Christina Schneider

Institut für Statistik, LMU München

11. März 2013

Gliederung

Inferenz im Kontext von Ronald Fisher

Fishers Beitrag zur Statistik

- $\ast$ 17. Februar 1890 in London, England
- 1912: Abschluss in Mathematik/Astronomie an der Universität Cambridge
- 1919: Stellenangebot von Karl Pearson am University College London
  Wechsel ans Agrarforschungsinstitut Rothamsted Experimental Station
- 1933: Professor für Eugenik am University College London als Nachfolger Pearsons
- 1943: Wechsel nach Cambridge, später nach Adelaide
- † 29. Juli 1962 in Adelaide, Australien

Suffizienz, Fisher-Information, Maximum-Likelihood

Inferenz im Kontext von Ronald Fisher

Fisher und seine Zeitgenossen

Ronald Fisher vs. Karl Pearson

- 1914: Einreichung eines Manuskripts durch Fisher bei Pearson
- 1917: Kritik Pearsons an erstem größeren Artikel
- heftige Meinungsverschiedenheit in statistischen Fragestellungen
- Pearson: großer Stichprobenumfang für korrekte Aussagen nötig
  Fisher: auch kleinere Stichproben lassen Schlüsse zu
- seit 1918: Weigerung Pearsons zur Veröffentlichung von Fishers Arbeiten
- Pearson als Unterstützer bayesianischer Methoden

$\Rightarrow$ **Distanzierung Fishers von den Bayes-Methoden**

Ronald Fisher vs. Jerzy Neyman

- Idee des Fiduzialargumentes und Veröffentlichung als „Inverse Probability“
- Entwicklung der Theorie der Konfidenzintervalle durch Neyman
- Akzeptanz als „Generalisierung des Fiduzialargumentes“
- aber: strikte Ablehnung der inhaltlichen Auffassung durch Fisher
- Missverständnisse und Fishers „mathematische Ungenauigkeiten“ führten zu offenem Konflikt
- starke Distanzierung der beiden Wissenschaftler

$\Rightarrow$ **Differenzen führten zu großem Gewinn für die Entwicklung der Statistik**

Inferenz im Kontext von Ronald Fisher

Probleme vorherrschender Inferenzkonzepte

klassisch/frequentistisch

- Schätzabbildung aus Stichprobenraum in Parameterraum
- Schätzfunktionen nicht eindeutig $\rightarrow$ (subjektive) Optimalitätskriterien
- einzig zugelassene Information ist die Stichprobe selbst
- Problem: keine Verwendung von Priori-Information möglich

bayesianisch

- Vorabinformationen werden integriert
- Inferenz auf Basis einer sog. A-Posteriori-Verteilung
- Problem: Annahme einer Priori-Verteilung zwingend notwendig

„Frequentisten haben dann ein Problem, wenn A-Priori-Information gegeben ist, weil sie diese nicht verwerten können; die Bayesianer haben dann ein Problem, wenn keine A-Priori-Information vorhanden ist, weil sie diesen Zustand nicht beschreiben können" – Meili (2000) –

Das Fiduzialargument

Motivation

- in Fishers Augen ist weder das frequentistische noch bayesianische Inferenzkonzept zufriedenstellend
- Fiduzialargument als Versuch eines „allumfassenden Inferenzkonzeptes“

„Fisher believed that there must exist a (...) inference that would yield a correct answer to any statistical problem“ – Efron (1998) –

- Fiduzialverteilung als Quasi-A-Posteriori-Verteilung **ohne** Annahme einer subjektiven Priori
- Keine Existenz einer voll anerkannten Definition, lediglich eine Sammlung von Beispielen

Das Fiduzialargument

Fiduzialverteilung – Ein Beispiel

Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsgröße, also $X \sim N(\theta, 1)$

Einführung einer Pivotgröße $T := X - \theta$ mit $T \sim N(0,1) \quad \forall\, \theta \in \Theta$

Beweis.

$$Z \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad U = \frac{Z-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \quad \forall\, \mu \in \Theta$$

Fiduzialverteilung:

Sei $x = 1.805$ die einzige Realisation aus $X \sim N(\theta, 1)$, dann:

$$\theta = x - T \quad \Rightarrow \quad \theta|X \sim N(x,1) \quad \forall\, T \in \mathbb{R}$$

$$\theta = 1.805 - T \quad \Rightarrow \quad \theta|x \sim N(1.805,1) \quad \forall\, T \in \mathbb{R}$$

Fiduzialverteilung nicht als klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung, da θ fest $\rightarrow$ Maß der Gewissheit über unbekannten Parameterwert

Das Fiduzialargument

Fiduzialverteilung – Ein Beispiel

- $X \sim N(\theta, 1)$, sowie $T := X - \theta$ mit $T \sim N(0,1) \quad \forall\, \theta \in \Theta$
- Sei $x = 1.805$ einzige Beobachtung von X sowie t_1 ein fester Wert von T

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mathbb{P}(T > t_1) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X - \theta > t_1) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(\theta < X - t_1) = \alpha_1 \end{aligned}$$

Für $t_1 = -2:$ $\quad \alpha_1 = \mathbb{P}(T > t_1) = 1 - \mathbb{P}(T \leq -2) = 0.9772 \;\Leftrightarrow$

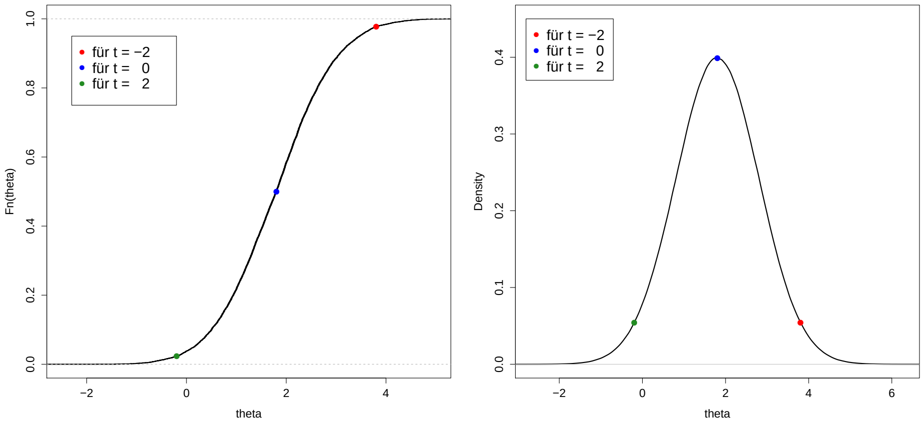
$$\mathbb{P}(\theta < X - t_1) = \mathbb{P}(\theta < 3.805) = 0.9772 = \alpha_1$$

Für $t_1 = 0:$ $\quad \mathbb{P}(\theta < 1.805) = 0.5$

Für $t_1 = 2:$ $\quad \mathbb{P}(\theta < -0.195) = 0.0228$

Das Fiduzialargument

Fiduzialverteilung – Ein Beispiel



Das Fiduzialargument

Fiduzialintervalle vs. Konfidenzaussagen

100(1-α)-Prozent-Fiduzialintervall

$$FI = [q_{\frac{\alpha}{2}}, \;\; q_{1-\frac{\alpha}{2}}] = [q_{0.025}, \;\; q_{0.975}] = [-0.155, \;\; 3.765]$$

100(1-α)-Prozent-Konfidenzintervall

$$KI = [\hat{\theta} - z_{\frac{\alpha}{2}}, \;\; \hat{\theta} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = [\hat{\theta} - z_{0.025}, \;\; \hat{\theta} + z_{0.975}]$$
$$= [1.805 - 1.96, \;\; 1.805 + 1.96] = [-0.155, \;\; 3.765]$$

- Zu Fishers Zeiten nahezu äquivalente Verwendung der Bezeichnungen
- Feste Überzeugung Fishers der Verschiedenartigkeit beider Konzepte
- postdiktive vs prädiktive Interpretation

Das Fiduzialargument

Fiduzialintervalle vs. Konfidenzaussagen

Konfidenzintervalle

- Wahrscheinlichkeitsaussagen nur vor Datenbeobachtung möglich
- A-Posteriori ausschließlich postdiktive Interpretation zulässig
- Kein „Lernen“ aus Daten / keine „Vorhersagen“

Fiduzialintervalle

- prädiktive Interpretation erlaubt
- „Vorhersagen“ möglich
- für den Anwender intuitiveres Konzept

Kritikpunkte

Einschränkung auf den stetigen Fall

Fisher hatte das ambitionierte Ziel eines „allumfassenden Inferenzkonzeptes“

⇒ Entwicklung des Fiduzialargumentes

> *„It is emphasised that (...) statements of fiducial probability can only be derived from statistics having continous distributions.“* – Fisher (1930) –

⇒ Einschränkung auf den stetigen Fall

⇒ **Unvereinbarkeit mit angestrebter Grundidee!**

Kritikpunkte

Verwendung von Pivotgrößen und suffizienten Statistiken

zu Pivotgrößen

- Lässt sich eine geeignete Pivotgröße finden?
- Ist diese Pivotgröße immer eindeutig zu konstruieren?
- vor allem im mehrdimensionalen Fall problematisch

zu suffizienten Statistiken

- Kein Zusammenhang mit dem Kernkonzept des Fiduzialargumentes
- Dempster zeigte die Unnötigkeit der Suffizienzforderung

Kritikpunkte

Annahmen an Verteilungsfunktionen

Fishers Forderungen für Wahrscheinlichkeitsaussagen im Fiduzialargument

1. $F(\cdot,\theta) = F_\theta : \mathbb{R} \mapsto [0,1], \;\; x \mapsto F(x,\theta)$

   ist wohldefiniert und strikt monoton **wachsend** in x für jedes feste θ
2. $F(x,\cdot) = F_x : \Theta \mapsto [0,1], \;\; \theta \mapsto F(x,\theta)$

   ist wohldefiniert und strikt monoton **fallend** in θ für jedes feste x

Folgerungen

- allgemein saubere Beweisführung
- Für die Praxis zu einschränkende formale Vorraussetzungen

Betrachtung des bekannten Beispiels

- $X \sim N(\theta, 1)$, sowie $T := X - \theta$ mit $T \sim N(0,1) \quad \forall\, \theta \in \Theta$
- t_1 ein fester Wert von T
- $\mathbb{P}(T > t_1) = \alpha_1$ mit $(1 - \alpha_1)$ als entsprechendes Quantil der $N(0,1)$

Fishers Idee der Umformung für Wahrscheinlichkeitsaussagen bezüglich θ

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \mathbb{P}(T > t_1)\\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X - \theta > t_1)\\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(\theta < X - t_1) = \alpha_1\end{aligned}$$

Kritikpunkte

Das Interpretationsproblem

$$\mathbb{P}(\theta < X - t_1) = \alpha_1$$

- Transformation des Wahrscheinlichkeitsmaßes vom Datenraum in den Parameterraum
- Nach Datenbeobachtung fehlt für festes t_1 die zufällige Größe
- θ fest, keine „Realisation eines Zufallsexperimentes“

$\Rightarrow$ **Es existieren keine frequentistischen Wahrscheinlichkeitsaussagen bezüglich** θ

Abschließende Bewertung

Ausgangslage:

- Fiduzialargument als Fishers Antwort zu Bayesianischen Methoden
- Ablehnung resultierte zumindest teilweise aus Differenzen mit Pearson und Neyman

Die gute Nachricht:

- Konstruktion von „A-Posteriori-Verteilungen“ ohne Priori-Annahme
- Fidzuialargument als Basis für Erweiterungen und eigenständige Konzepte

Abschließende Bewertung

Die schlechte Nachricht:

- strenge formale Vorraussetzungen
- Verwendung von Pivotgrößen
  - Auswahl folgt keiner Reglementierung, es exisitiert lediglich eine Beispielsammlung
  - Existenz mehrerer Pivotgrößen im mehrparametrischen Fall führt zu verschiedenen Fiduzialverteilungen
  - Vermeidung der subjektiven bayesianischen Beliebigkeit schlägt fehl
- Weitere Vorraussetzungen sind unnötig und stehen im keinem logischen Zusammenhang mit Kernkonzept
- Transfer des Wahrscheinlichkeitsmaßes vom Datenraum in den Parameterraum lässt keine frequentistische Interpretation zu

Abschließende Bewertung

Fisher's one great failure

– Sandy Zabell (1992) –

Maybe Fisher's biggest blunder
will become a big hit in the 21st century!

– Bradley Efron (1998) –