Jakob Bernoulli
Historische Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Bachelor Seminar

Georgios Mechteridis

Betreuer: Marco E. G. V. Cattaneo

„Jede Wissenschaft bedarf der Mathematik, die Mathematik bedarf keiner."

Jakob Bernoulli

Die Mathematiker Familie Bernoulli

- Bernoulli Familie war eine der bekanntesten Mathematiker Familien des 17. und 18. Jahrhunderts

- Stammten ursprünglich aus den Niederlanden flüchteten aber aus religiösen Gründen in die Schweiz

- Acht Mitglieder und durch vier Generationen hindurch befassen sich mit Naturwissenschaften und der Mathematik

- Zwei davon, Jakob und Johann spielten eine sehr wichtige Rolle in der Mathematik:

  – Rivalen („Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli“)

  – Legten den Grundstein der Wahrscheinlichkeitstheorie

  – Grundstein für eine neue analytische Disziplin: die Variationsrechnung.

Lebenslauf (1)

- Lebenszeit: 27. Dezember 1654 -16. August 1705 in Basel, Schweiz
- Er studierte Philosophie und protestantische Theologie in Basel
- Nebenbei besuchte er auch Vorlesungen für Mathematik und Astronomie
- 1688: Wurde er Professor für Mathematik an der Universität Basel
- Nach seinem Tod übernahm sein Bruder Johann seinen Lehrstuhl in Basel

Lebenslauf (2)

- 1713: Nach seine Tod wird sein Werk „Ars Conjectandi“ von seinem Neffen Nikolaus Bernoulli herausgegeben (geschrieben ab 1680)
  - Teil I: Huygens: Abhandlung über die bei Glückspielen möglichen Berechnungen, mit Kommentaren von Bernoulli
  - Teil II: Permutations- und Kombinationslehre
  - Teil III: Anwendungen der Kombinatorik auf verschiedene Glücks- und Würfelspiele
  - Teil IV: Anwendung auf "bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse". Darin schwaches Gesetz der großen Zahl mit elementarem Beweis

Lebenslauf (3)

- Bedeutung in der Mathematik:
  - Jakob Bernoulli ist der erst der ein Buch über die Wahrscheinlichkeitsrechnung herausgab, der den Begriff Wahrscheinlichkeit verwendet hat (Vgl.: Huygens hat den Begriff Erwartungswert verwendet)
  - Hat wesentlich zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie beigetragen

Beitrag Bernoullis zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Herausgabe der ***Ars Conjectandi*** (Zusammenfassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung anderer Autoren und Weiterentwicklung)
- Bernoulli-Verteilung

Was ist Wahrscheinlichkeit? (1)

- „Wenn ein Affe unendlich lange auf einer Schreibmaschine tippt geht die Wahrscheinlichkeit, dass er Goethes Faust schreibt, gegen 1.“

  → Die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie ist Probleme wie diese zu präzisieren

- In der griechischen Antike meinte Aristoteles: „Denn wahrscheinlich ist, was sich meistens ereignet…“

- Carneades hat den Begriff als steigerungsfähig angesehen: „tatsächlich wahrscheinlich“, „scheinbar wahrscheinlich“

  → „Denn nicht alles was wahrscheinlich erscheint ist es auch“

Was ist Wahrscheinlichkeit? (2)

Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewissheit und unterscheidet sich von ihr wie ein Teil vom Ganzen. Wenn z.B. die volle und absolute Gewissheit, welche wir mit a oder 1 bezeichnen, aus fünf Wahrscheinlichkeiten oder Teilen bestehend angenommen wird, von denen drei für das gegenwärtige oder zukünftige Eintreten irgend eines Ereignisses und die übrigen beiden dagegen sprechen, so soll das Ereignis $\frac{3}{5}a$ *oder* $\frac{3}{5}$ *der Gewissheit haben.*

Moralisch gewiss ist etwas, dessen Wahrscheinlichkeit nahezu der vollen Gewissheit gleichkommt, so dass ein Unterschied nicht wahrgenommen werden kann. Moralisch unmöglich dagegen ist das, was nur so viel Wahrscheinlichkeit besitzt, als dem moralisch Gewissen an der vollen Wahrscheinlichkeit fehlt.

Wahrscheinlichkeitsauffassungen

- Man unterschiedet zwischen unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsbegriffen, zwei wichtige sind:

  1. Symmetrieprinzip – Klassische- oder Laplacesche Auffassung)

  2. Häufigkeitsprinzip – Statistische Wahrscheinlichkeitsauffassung

Symmetrieprinzip – Klassische- oder Laplacesche Auffassung)

- Wahrscheinlichkeit ist das Verhältnis der günstigen Ereignise zur Anzahl aller möglichen Ereignisse (Bernoulli, Huygens, Laplace)

$$P(E) = \frac{\text{„Anzahl der für E günstigen Fälle“}}{\text{„Anzahl aller möglichen gleichwahrscheinlichen Fälle“}} = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

- Beispiel: Würfel → jede Zahl hat die gleiche Chance, nämlich $\frac{1}{6}$

Häufigkeitsprinzip – Statistische Wahrscheinlichkeitsauffassung

- Experiment wird so oft wie möglich wiederholt und dann werden die relativen Häufigkeiten des Ereignisses berechnet.

- Beispiel: GdgZ (dazu komme ich später)

Schöpfer der Wahrscheinlichkeitstheorie

Cardano (1501-1576)	**Pascal-Fermat (1623-1662)**	**Huygens (1629-1695)**
• Italienischer Mathematiker der sich mit der Beschreibung mit Zufallserscheinungen auseinandersetzt • Motiviert wurde er durch das Glückspiel • Untersucht in seinem Buch „Liber de ludo aleae“ (1663) das Spiel mit mehreren Würfeln	• Zwei französische Mathematiker die durch ihren Briefwechsel: 1. Wahrscheinlichkeitsrechnung revolutioniert haben 2. Grundlagen für die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie gelegt haben	• Niederländischer Astronom und Mathematiker • Einer der Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung • Er schrieb: De ratiociniis in ludo aleae (1657)

Ars Conjectandi

(=Kunst des Vermutens)

Über das Werk Ars Conjectandi

- Baut auf die Wahrscheinlichkeitstheorien von Hyugens, Cardano etc. auf
- Beschäftigt sich mit der Wahrscheinlichkeitstheorie ist aber nicht nur die Wissenschaft von Glückspielen sondern von allgemeinen rationalen Vermutungen
- Somit ist Ars Conjectandi wegweisend für die Wahrscheinlichkeitstheorie
- Beweis und Formulierung des Gesetztes der großen Zahlen
- Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie

Teil I:
Huygens: Abhandlung über die bei Glückspielen möglichen Berechnungen mit Kommentaren von Bernoulli

- Bernoulli beschäftigt sich im 1. Teil seines Buches mit welcher Wahrscheinlichkeit man bei einem Glücksspiel gewinnen kann.

- Beispiel:
  - Person A spielt mit Person B.
  - Bedingung: Gewinner ist der, der zuerst dreimal gewinnt.
  - Ist-Zustand: Person A hat schon zweimal gewonnen, Person B nur einmal.

- Frage: Wie wird der Spieleinsatz aufgeteilt bei Abbruch des Spieles?

Lösung:

- Bernoulli lehnt sich an die Lösung von Huygens an.

→ Dabei erhält A 3/4a und B 1/4a.

- Bernoulli geht davon aus, dass folgende Fälle eintreten können:

- Spieler A gewinnt und bekommt den ganzen Einsatz bzw. Spieler B gewinnt und es steht unentschieden.

  → In diesem Fall steht jedem ein 1/2 a zu. Da aber das Spiel bei 2:1 unterbrochen wurde, erhält mit Rücksicht auf „Lehrsatz 1“ der Spieler mit 2 gewonnenen Spielen die halbe Summe beider d.h. 3/4a wobei a der Gesamteinsatz ist.

  → Anschließend erfolgen eine Reihe von Anmerkungen.

  → Bernoulli weit über die Betrachtungen Huygens hinaus und führt folgendes Beispiel auf:

Unter dem Buchstaben a können wir nicht nur die eingesetzte Geldsumme verstehn, sondern auch ganz allgemein alles das, was an sich untheilbar ist, aber doch als theilbar nach der Anzahl der Fälle, in denen es erworben oder verloren, erreicht oder nicht erreicht wird, aufgefasst werden kann. Wenn z.B. zwei zum Tode verurteilten Verbrechern durch besondere Gunst des Fürsten gestattet wird, bei gleicher Hoffnung auf Gewinn um ihr Leben zu würfeln, so muss man annehmen, dass jeder die Hoffnung auf $\frac{1}{2}$ *Leben oder Tod hat, so dass ein solcher Mann im eigentlichen Sinne des Wortes halblebendig oder halbtod genannt werden kann. Wenn den zwei Verbrechern gestattet wird, unter der Bedingung mit einander zu würfeln, dass derjenige, welcher weniger Augen wirft als der andere, gehängt wird, dem anderen aber das Leben geschenkt wird, und dass beide begnadigt werden, wenn sie die gleiche Zahl von Augen werfen, so hat jeder von beiden die Hoffnung* $\frac{7}{12}a$ *oder* $\frac{7}{12}$ *des Lebens. In diesem Fall folgt daraus nicht, dass die Hoffnung des anderen Verbrechers* $\frac{5}{12}$ *des Lebens beträgt, denn da die Hoffnungen beider offenbar gleich sind, so hat auch der andere eine Hoffnung gleich* $\frac{7}{12}$ *des Lebens, also beide* $\frac{7}{6}$ *des Lebens, d.h. mehr als ein Leben. Dies kommt daher, dass es keinen Fall gibt, in welchem nach Beendigung des Spieles nicht wenigstens einer am Leben bleibt, dass es aber einige Fälle gibt, in welchen beide Verbrecher am Leben bleiben.*

Teil II: Permutations- und Kombinationslehre

Es werden behandelt:

- Lehre von den Permutationen
- Lehre von den Kombinationen
- Kombinationen in Verbindung mit ihren Permutationen

Permutationen

Permutationen von Dingen nenne ich die Aenderungen, durch welche unter Beibehaltung derselben Anzahl von Dingen ihre Ordnung und Stellung verschiedentlich vertauscht wird.

Die folgende Tafel giebt die Permutationszahlen bis $n = 12$: [**76**]

Anzahl der Dinge:	1	2	3	4	5	6	7	8
Permutationszahl:	1	2	6	24	120	720	5040	40320

Anzahl der Dinge:	9	10	11	12
Permutationszahl:	362880	3628800	39916800	479001600.

Kombinationen

Combinationen von Dingen sind Verbindungen solcher Art, dass aus einer gegebenen Anzahl von Dingen einige herausgenommen und mit einander verbunden werden, ohne dass ihre Ordnung und Stellung irgendwie berücksichtigt wird.

Kombinationen in Verbindung mit ihren Permutationen

Es bleibt uns also noch übrig, in diesem und in den folgenden Kapiteln die Lehre von den Combinationen in Verbindung mit ihren Permutationen (d. i. von den Variationen[26]) zu entwickeln, indem wir zeigen, auf wieviele verschiedene Arten mehrere verschiedene oder theilweise einander gleiche Dinge zu einer oder zu mehreren Classen mit einander combinirt und dann in jeder Combination permutirt werden können, und zwar sowohl wenn keines der gegebenen Dinge mit sich selbst combinirt werden darf, als auch wenn dies gestattet ist.

(Variationen ohne Wiederholung)

- Ausführliche Darstellung der Kombinationslehre
- Behandlung der Bernoullischen Zahlen
- <u>Beispiele</u>:

Gegen Ende des 17. Jahrhundert gelingt es Bernoulli eine Formel für die Summe beliebiger Potenzen natürlicher Zahlen zu finden:

$$1^m + 2^m + \ldots + n^m = \frac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1} - \binom{m+1}{1} B_1 n^m + \binom{m+1}{2} B_2 n^{m-1} - \ldots + (-1)^m \binom{m+1}{m} B_m n\right).$$

$$\binom{m+1}{k} = \frac{(m+1)!}{k!\,(m+1-k)!}$$

- Entspricht dem Pascalschen Dreieck (Binomialkoeffizienten).
- B_m sind die Bernoulli-Zahlen.
- Die ersten Bernoulli-Zahlen sind:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -1/2, \quad B_2 = 1/6, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -1/30, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = 1/42, \; \ldots.$$

- Man kann damit die Summe der sechsten Potenzen ausrechnen.

Teil III:
Anwendungen der Kombinatorik auf verschiedene Glücks- und Würfelspiele

- Kombinatorik spielt in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie eine sehr große Rolle

- Insbesondere bei der Untersuchung von Glücksspielen

- Kombinatorik wird benutzt bei zukünftlichen Entwicklungen, die gleichwahrscheinlich sind

Teil IV:
Anwendungen der vorhergehenden Lehre auf bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse. Darin schwaches Gesetz der großen Zahl mit elementarem Beweis

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

- Definition:

  - Es sei: $X_1, X_2, \dots, X_n$ Bernoulli-Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p

  - Es sei übrigens: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, die Anzahl der Erfolge in $n - mal$ unabhängig wiederholten Bernoulli-Experimenten

    → Dann gilt: $\boxed{\forall \varepsilon > 0 : P(|\frac{X}{n} - p| \geq \varepsilon) \to 0 \ \text{für}\ n \to \infty}$

- Interpretation:

  - Die Wahrscheinlichkeit, dass die Analogie der Erfolge $\frac{X}{n}$ in $n - mal$ unabhängig wiederholten Bernoulli-Experimenten von der Erfolgswahrscheinlichkeit p abweicht, konvergiert gegen 0 wenn das n groß ist

Starkes Gesetz der großen Zahlen

- Definition:
  - Es sei: $X_1, X_2, \dots, X_n$ Bernoulli-Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p
  - Es sei übrigens: $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))$, die Anzahl der Erfolge in $n - mal$ unabhängig wiederholten Bernoulli-Experimenten

  $\rightarrow$ Dann gilt: $\boxed{\forall \varepsilon > 0 : P(\lim_{n\to\infty} \overline{X_n} = \mu) = 1}$

- Interpretation:
  - Die Wahrscheinlichkeit, dass der Arithmetische Mittelwert $\overline{X}$,wenn die Anzahl der Elemente in der Stichprobe größer werden, gleich dem Erwartungswert der Grundgesamtheit μ ist, beträgt 1.

- Ziel Bernoullis waren nicht die Glückspiele, sondern wie man zu objektiv angemessenen Entscheidungen kommen kann.

- Glückspiele wurden von ihm nur zur Illustration der Vorgehensweise verwendet.

„Wenn also alle Ereignisse durch alle Ewigkeit hindurch fortgesetzt beobachtet würden (wodurch schliesslich die Wahrscheinlichkeit in volle Gewissheit übergehen müsste), so würde man finden, dass Alles in der Welt aus bestimmten Gründen und in bestimmter Gesetzmässigkeit eintritt, dass wir also gezwungen werden, auch bei noch so zufällig erscheinenden Dingen eine gewisse Nothwendigkeit, und sozusagen ein Fatum anzunehmen. Ich weiss nicht, ob hierauf schon Plato in seiner Lehre vom allgemeinen Kreislaufe der Dinge hinzielen wollte, in welcher er behauptet, dass Alles nach Verlauf von unzähligen Jahrhunderten in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt."

- Er beschreibt folgende Begriffe:
  1. Unterschied zwischen Gegenwart, Vergangenheit und Zukunft
  2. Begriff der Wahrscheinlichkeit
  3. Zufall
  4. Stochastik

Unterschied zwischen Gegenwart, Vergangenheit und Zukunft

Alles, was unter der Sonne existiert oder entsteht, das Vergangene, das Gegenwärtige und das Zukünftige hat an sich die höchste Gewissheit. Hinsichtlich der gegenwärtigen und vergangenen Dinge ist diese Behauptung von selbst einleuchtend, da eben jene Dinge dadurch, dass sie vorhanden sind oder gewesen sind, die Möglichkeit, dass sie nicht existieren oder existiert haben, ausschließen. Auch hinsichtlich der zukünftigen Dinge ist nicht daran zu zweifeln, dass sie vorhanden sein werden, wenn auch nicht mit der unabwendbaren Notwendigkeit irgend eines Verhängnisses, so doch auf Grund göttlicher Voraussicht und Vorbestimmung. Denn wenn das, was zukünftig ist, nicht sicher sich ereignet, so ist nicht einzusehen, warum dem höchsten Schöpfer der uneingeschränkte Ruhm der Allwissenheit und Allmacht zukommen sollte. Darüber aber, wie sich diese Gewissheit des zukünftigen Seins mit der Zufälligkeit und der Unabhängigkeit der wirkenden Ursachen verträgt, mögen andere streiten; wir wollen hierauf, da dies unserem Ziel fernliegt, nicht eingehen.

Begriff der Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewissheit und unterscheidet sich von ihr wie ein Teil vom Ganzen. Wenn z.B. die volle und absolute Gewissheit, welche wir mit a oder 1 bezeichnen, aus fünf Wahrscheinlichkeiten oder Teilen bestehend angenommen wird, von denen drei für das gegenwärtige oder zukünftige Eintreten irgend eines Ereignisses und die übrigen beiden dagegen sprechen, so soll das Ereignis $\frac{3}{5}a$ *oder* $\frac{3}{5}$ *der Gewissheit haben.*

Moralisch gewiss ist etwas, dessen Wahrscheinlichkeit nahezu der vollen Gewissheit gleichkommt, so dass ein Unterschied nicht wahrgenommen werden kann. Moralisch unmöglich dagegen ist das, was nur so viel Wahrscheinlichkeit besitzt, als dem moralisch Gewissen an der vollen Wahrscheinlichkeit fehlt.

Zufall

Zufällig (sowohl insofern es von der Willkür eines mit Vernunft begabten Wesens, als auch insofern es von einem zufälligen Ereignis oder vom Schicksal abhängt) is das, was nicht sein, werden oder gewesen sein könnte, wohlverstanden in Folge einer entfernten, nicht der nächsten Möglichkeit; denn nicht immer schließt die Zufälligkeit die Notwendigkeit bis zu Ursachen von untergeordneter Bedeutung ganz aus.

Daher hängt die Zufälligkeit vornehmlich auch von unserer Erkenntnis ab, insofern als wir keinen Grund wahrnehmen können, welcher dagegen spricht, dass etwas nicht ist oder nicht sein wird, trotzdem es auf Grund der nächsten, uns aber noch unbekannten Ursache notwendig ist oder sein wird.

Stochastik

Etwas vorhersagen bedeute seine Wahrscheinlichkeit zu messen. Daher definieren wir die Wissenschaft der Vorhersage *oder* Stochastik *als die Wissenschaft, die Wahrscheinlichkeit von etwas so genau wie möglich zu messen, damit wir stets so entscheiden und handeln können , wie es besser, befriedigender, sicherer und ratsamer ist; nur darin besteht die Weisheit des Philosophen und die Klugheit des Staatsmannes.*

Literatur

- Bernoulli, Jakob; Haussner, Robert (translator) (1713/2002), “*Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi)“ (Deutsche Übersetzung)*
- *Enzyklopädie: Stochastikon*
- *Enzyklopädie: Wikipedia*
- *Technische Universität Bergakademie Freiberg, Die Bernoullischen Zahlen*
- *Romeike, Frank (2009); „Erfolgsfaktor Risiko-Management 2.0“, Methoden, Beispiele, Checklisten, Praxishanduch für Industrie und Handel, 2. Auflage*

- *Weitere Literaturangaben folgen…*