Aufgabe 26

Geben Sie eine anschauliche Erklärung der Begriffe Erwartungstreue und Effizienz. Warum ist es nicht sinnvoll, nur eines dieser beiden Gütekriterien bei der Beurteilung einer Schätzfunktion zu beachten?
Welches Gütemaß bezieht sowohl die Effizienz, als auch den Bias mit ein?

Aufgabe 27

Betrachten Sie den Schätzer $\hat{p}$ für die Wahrscheinlichkeit p eines Gewinnloses aus Aufgabe 24. Da es relativ unwahrscheinlich ist, dass der Schätzer $\hat{p}$ exakt mit der wahren Wahrscheinlichkeit p übereinstimmt, könnte man Aussagen der Form

„Der wahre Wert p liegt im Intervall $[\hat{p} - c, \hat{p} + c]$"

betrachten, wobei c eine positive, feste Konstante ist. Nehmen Sie an, dass die wahre Wahrscheinlichkeit p gleich $\frac{1}{10}$ ist und das für den Schätzer der Stichprobenumfang $n = 100$ gewählt wurde. Da die Variable $\hat{p}$ eine Zufallsvariable ist, kann die Aussage „der wahre Wert p liegt im Intervall $[\hat{p} - c, \hat{p} + c]$" als eine „Zufallsaussage" aufgefasst werden, die, abhängig vom Zufall, zutreffen kann oder nicht.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsaussage
„Der wahre Wert p liegt im Intervall $[\hat{p} - 0.01, \hat{p} + 0.01]$" richtig ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsaussage
„Der wahre Wert p liegt im Intervall $[\hat{p} - 0.02, \hat{p} + 0.02]$" richtig ist?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsaussage
„Der wahre Wert p liegt im Intervall $[\hat{p} - 0.06, \hat{p} + 0.06]$" richtig ist?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Aussage
„Der wahre Wert p liegt im Intervall $[0.09, 0.11]$" richtig ist?

Aufgabe 28

Die Zeit, die eine Mannschaft ohne Gegentor bleibt (in Minuten ab Beginn der Fußball-Europameisterschaft), wird als zufällig angenommen. Als Modell für die Wartezeit bis zum ersten Gegentor betrachtet man die Zufallsvariable X_i, von der angenommen wird, dass sie *exponentialverteilt* ist mit Parameter $\lambda > 0$. Die Dichte ist also $f(x_i) = \lambda \exp(-\lambda x_i)$.
Man betrachte nun n Mannschaften, wobei die Wartezeit bis zum ersten Gegentor pro Mannschaft durch die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ beschrieben wird.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}$ für die n Beobachtungen.

b) In der Fußball-Europameisterschaft 2012 ergeben sich für die teilnehmenden 16 Mannschaften die folgenden Zeiten ohne Gegentor:

Mannschaft	Zeit	Mannschaft	Zeit
Polen	50	Spanien	59
Griechenland	16	Italien	63
Russland	51	Irland	2
Tschechien	14	Kroatien	18
Niederlande	23	Frankreich	29
Dänemark	113	England	38
Deutschland	162	Ukraine	51
Portugal	71	Schweden	54

Berechnen Sie für diese Daten den Maxiumum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$.

c) Halten Sie die Exponentialverteilung für ein realistisches Modell für die Wartezeit bis zum ersten Gegentor?

Aufgabe 29

Ein Fernsehsender möchte wissen, wieviele Zuschauer eine bestimmte Fernsehsendung hat. Dazu wurde eine reine Zufallstichprobe vom Umfang $n = 500$ gezogen und die Personen wurden befragt. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Personen in der Stichprobe, die die gefragte Fernsehsendung anschauen.

a) Wie ist X verteilt?

b) Finden Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für den wahren Anteil π derjenigen Personen, die die Sendung anschauen, falls in der Stichprobe 98 Personen dies bejahten.