Aufgabe 22

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des in Beispiel 1 aus der Vorlesung verwendeten Schätzers $\bar{X}$ für den Mittelwert der täglichen Fernsehdauer von Jugendlichen in Deutschland:

Beispiel 1: Schätzer $\bar{X}$, Grundgesamtheit:

1	2	3	4	5
1.30	1.31	1.32	1.40	1.42

Wahrer Wert: 1.35

Ziehe Stichprobe vom Umfang $n = 2$ (ohne Zurücklegen) und berechne $\bar{X}$

S_1	S_2	$\bar{X}$	P
1	2	1.305	0.1
1	3	1.310	0.1
1	4	1.350	0.1
1	5	1.360	0.1
2	3	1.315	0.1
2	4	1.355	0.1
2	5	1.365	0.1
3	4	1.360	0.1
3	5	1.370	0.1
4	5	1.410	0.1

b) Betrachten Sie nun den vereinfachten Schätzer X, bei dem eine Stichprobe vom Umfang $n = 1$ gezogen wird und der erhaltene Wert als Schätzwert für den Mittelwert betrachtet wird. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz dieses Schätzers.

c) Für einen dritten Schätzer X_{min} werde wieder 2 mal (ohne Zurücklegen) gezogen, als Schätzer für den wahren Mittelwert werde jedoch nicht der Mittelwert der beiden gezogenen Werte, sondern der kleinere der beiden Werte genommen. Berechnen Sie für X_{min} ebenfalls Erwartungswert und Varianz.

d) Welchen der drei betrachteten Schätzer würden Sie bevorzugen?

Aufgabe 23

Um den Karpfenbestand in einem Gewässer zu ermitteln, sollen zunächst 100 Karpfen gefangen und markiert werden. Anschließend werden sie wieder ins Gewässer entlassen. Nach einer gewissen Zeit werden nun wieder 100 Fische gefangen (also zufällig, mit Zurücklegen gezogen). Nun wird zunächst der Anteil $p = \frac{100}{N}$ der markierten Karpfen, bezogen auf die Gesamtzahl N aller Karpfen im Gewässer, durch die Vorschrift

$$\hat{p} = \frac{\text{Anzahl } A_m \text{ aller gezogener markierter Karpfen}}{\text{Anzahl aller gezogener Karpfen}} = \frac{A_m}{100}$$

geschätzt.

a) Zeigen Sie, dass der Schätzer $\hat{p}$ ein erwartungstreuer Schätzer für den Anteil p aller markierter Karpfen im Gewässer ist.

b) Da $p = \frac{100}{N}$ gilt, ist es naheliegend, als Schätzer für die eigentlich interessierende Größe N den Schätzer $\hat{N} = \frac{100}{\hat{p}}$ zu wählen. Was ist das Problem bei diesem Schätzer?

c) Man kann zur Schätzung auch so vorgehen, dass man so lange Karpfen fängt, bis man das erste mal einen markierten Karpfen erwischt. Sei nun n die Anzahl der Fangversuche, bis zum ersten mal ein markierter Karpfen gefangen wurde, d.h. der n-te gefangene (und danach wieder „zurückgelegte“) Karpfen war der erste markierte. Zeigen Sie, dass der Schätzer

$$\hat{N}_2 = 100 \cdot n$$

erwartungstreuer Schätzer für die Gesamtzahl N aller Karpfen im Gewässer ist.
Hinweis: Sie können dazu die Gleichheit $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^i = \frac{q}{(1-q)^2}$ verwenden.

Aufgabe 24

Ein Lotteriebetreiber wirbt mit dem Slogan „Jedes 10te Los ein Treffer“. Um die dadurch suggerierte Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{10}$ für ein Gewinnlos zu überprüfen, werden n Lose erworben und der Anteil an Gewinnlosen $\hat{p}$ als Schätzer für die Erfolgswahrscheinlichkeit p betrachtet.

a) Nehmen Sie an, dass die Gesamtzahl N der Lose in der Lotterie bekannt ist. Wie groß müssten Sie n wählen, um den kleinstmöglichen Wert für die Varianz von $\hat{p}$ zu erhalten?

b) Nehmen Sie jetzt an, dass die Gesamtzahl N der Lose in der Lotterie unbekannt, aber sehr groß ist. Dadurch können Sie den Loskauf annähernd als Ziehen mit Zurücklegen betrachten. Wie hoch ist n (mindestens) zu wählen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schätzwert $\hat{p}$ nicht mehr als 0.01 vom wahren Wert p abweicht, größer oder gleich 0.95 ist? (Verwenden Sie dazu eine Normalverteilungsapproximation.)