Aufgabe 14

Eine Zufallsvariable X sei standardnormalverteilt, d.h. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$.

a) Skizzieren Sie die Dichte sowie die Verteilungsfunktion.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für $X < 1.96$, $X < 1.5$, $X \geq 0.7$ und $X > -2.58$ (mittels Software oder der Tabelle).

c) Wie findet man graphisch anhand der Dichte bzw. anhand der Verteilungsfunktion die gesuchte Wahrscheinlichkeit?

Aufgabe 15

In der Psychologie werden standardmäßig sogenannante *T-Werte* oder *T-Scores* zur Messung von Persönlichkeitsmerkmalen verwendet. Diese sind so konstruiert, dass sie in der Gesamtbevölkerung normalverteilt mit Erwartungswert 50 und Standardabweichung 10 sind.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine (per einfacher Zufallsauswahl gezogene) Person einen T-Wert von mehr als 70 hat? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen T-Wert von mehr als 90, sowie für einen T-Wert im Bereich von 40 bis 60?

b) Angenommen, man zieht eine einfache Zufallsstichprobe von 10 Personen aus der Gesamtbevölkerung. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass der durchschnittliche T-Wert mindestens 40 und höchstens 60 beträgt? (Für unabhängige Zufallsvariablen X_i, $i = 1, \dots, n$, mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.)

Aufgabe 16

Man betrachtet n Zufallsvariablen $X_i, i = 1, \dots, n$, die unabhängig identisch normalverteilt sind mit $\mu_{X_i} = 0$ und $\sigma^2_{X_i} = 1$. Die Zufallsvariable $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist dann normalverteilt mit $\mu_{\bar{X}_n} = 0$ und $\sigma^2_{\bar{X}_n} = \frac{1}{n}$.

a) Skizzieren Sie die Dichte von $\bar{X}_n$ für verschiedene Werte von n.

b) Betrachten Sie Intervalle der Art $[\mu_{\bar{X}_n} - c\,,\, \mu_{\bar{X}_n} + c]$. Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit für $\bar{X}_n \in [\mu_{\bar{X}_n} - c\,,\, \mu_{\bar{X}_n} + c]$ in Abhängigkeit von n?

Aufgabe 17

a) Interpretieren Sie folgende Formeln zur Analyse von Lebensdauern:

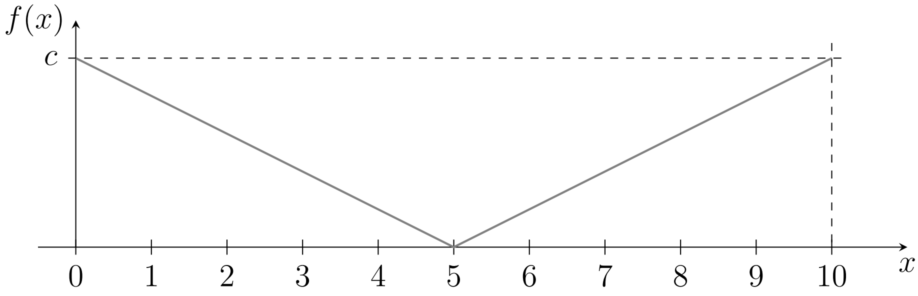
$$P(t \le T \le t+h \mid T \ge t)$$
$$\lambda(t) := \lim_{h \to 0} \frac{P(t \le T \le t+h \mid T \ge t)}{h}$$

b) Angenommen, Sie haben Daten über die Dauer von Arbeitslosigkeit bis zum Berufs-Wiedereinstieg. Was bedeuten dann die in a) aufgeführten Größen in diesem Beispiel?

c) Sei T exponentialverteilt mit Parameter λ. Zeigen Sie, dass hier $\lambda(t) = \lambda$ gilt.

Aufgabe 18

Für die Wartezeit bis auf den Bus, der alle 10 Minuten fährt, soll die unten skizzierte Dichte gelten.



a) Geben Sie eine Formel für die skizzierte Dichte an.
Hinweise:

- Bestimmen Sie zunächst c.
- Für die Fläche eines Dreiecks gilt: Fläche = 0.5 · Breite · Höhe.
- Machen Sie für die Formel die Fallunterscheidung $x \in [0,5]$ vs. $x \in (5,10]$ vs. sonst.

b) Zeigen Sie, dass für die Verteilungsfunktion gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{50}(10x - x^2) & \text{für } x \in [0,5] \\ \frac{1}{50}(x^2 - 10x) + 1 & \text{für } x \in (5,10] \\ 1 & \text{für } x > 10 \end{cases}$$

c) Bestimmen Sie die Hazardrate, und skizzieren und interpretieren Sie deren Verlauf.