Aufgabe 8

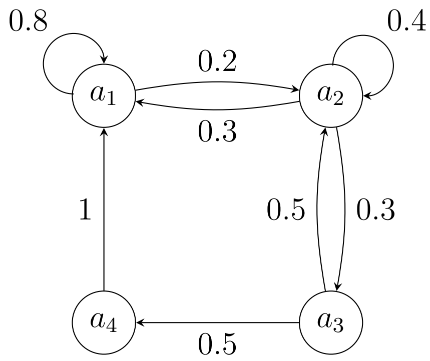
Für die Modellierung des Verlaufs einer Vorlesung werden folgende vier Zustände unterschieden:

a_1: ruhig, normale Vorlesung

a_2: leises Getuschel

a_3: lautes Getuschel

a_4: Dozent ermahnt Studierende zur Ruhe



Der Graph rechts stellt dar, welche Übergänge zwischen den Zuständen möglich sind und mit welcher Wahrscheinlichkeit sie stattfinden.

a) Stellen Sie aus den Angaben im Graphen die Übergangsmatrix auf.

b) Nehmen Sie an, dass eine 45-Minuten-Vorlesung in 5-Minuten-Abschnitte unterteilt wird, zu denen jeweils ein Zustand gilt. Wie oft muss der Dozent die Studierenden im ungünstigsten Fall ermahnen, wenn die Vorlesung ruhig beginnt?

c) Wie groß sind die 2-Schritt-Wahrscheinlichkeiten von a_3 auf a_1, a_2 und a_4?

Aufgabe 9

Bei einem tatsächlich durchgeführten Experiment zum Münzwurf (`http://comptop.stanford.edu/u/preprints/heads.pdf`) wurde „festgestellt“, dass eine geworfene Münze mit höherer Wahrscheinlichkeit auf der Seite landet, mit der sie unmittelbar vor dem Wurf oben lag. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze Kopf zeigt, nachdem sie mit „Kopf oben“ geworfen wurde, wurde als $p = 0.51$ geschätzt.

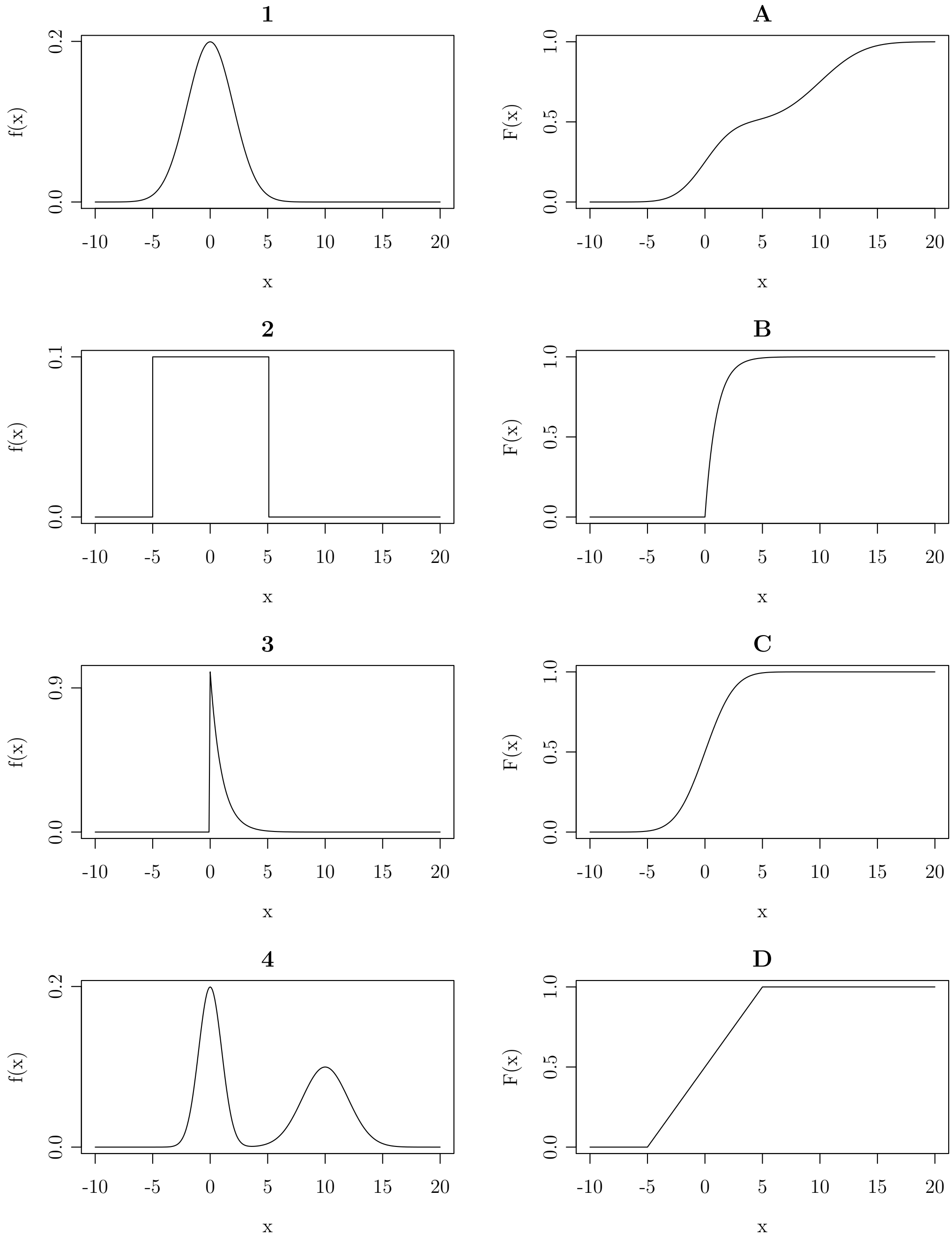
a) Wie hoch ist unter der Richtigkeit dieser Behauptung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine mit „Kopf oben“ geworfene Münze bei 200 Münzwürfen in mindestens 51% der Fälle (also in mindestens $0.51 \cdot 200 = 102$ Fällen) auf Kopf landet? (Sie können für die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit z.B. **R** benutzen.)

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei 20000-fachem Münzwurf in mindestens 51%, also in mindestens 10200 Fällen, Kopf zu erhalten?

c) Wie würden Ihre Antworten zu a) und b) lauten, wenn Sie entgegen der Aussage der Studie von einer perfekt fairen Münze ausgehen würden (d.h. $p = 0.5$)?

Aufgabe 10

Im Folgenden sehen Sie vier Dichtefunktionen (links) und vier Verteilungsfunktionen (rechts). Ordnen Sie jeder Dichtefunktion die zugehörige Verteilungsfunktion zu! Haben Sie eine Vermutung, um welche Verteilungen es sich handelt?



Aufgabe 11

Laut DESTATIS (ehem. Statistisches Bundesamt) sind im Stadtgebiet München im Jahr 2010 bei Straßenverkehrsunfällen 16 Personen getötet und 545 Personen schwer verletzt worden. Im Durchschnitt sind also $561/365 \approx 1.54$ getötete oder schwerverletzte Personen pro Tag in München zu erwarten.

a) Nehmen Sie an, dass die Anzahl der pro Tag getöteten oder schwerverletzten Personen Poisson-verteilt ist. Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion bis einschließlich der Ausprägung 5.

b) Wie groß ist unter diesem Modell die Wahrscheinlichkeit, dass an es einem Tag höchstens drei Getötete oder Schwerverletzte gibt? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mehr als fünf Getötete oder Schwerverletzte?

Aufgabe 12

Betrachten Sie folgende ‚Rechenregeln' für den Erwartungswert und die Varianz mit den Zufallsvariablen X und Y. Geben Sie jeweils an, ob die Regeln richtig sind, bzw. unter welchen Bedingungen sie korrekt sind!

a) $\mathbb{E}(X + a) \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(X)$

b) $\mathbb{E}(Y + X) \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

c) $\mathbb{E}(X - Y) \stackrel{?}{=} 0$

d) $\mathrm{Var}(X + Y) \stackrel{?}{=} \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

e) $\mathrm{Var}(X - Y) \stackrel{?}{=} \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)$

f) $\mathbb{E}(X^2) \stackrel{?}{=} \mathrm{Var}(X)$

g) $\mathrm{Var}(aX) \stackrel{?}{=} a\mathrm{Var}(X)$

Aufgabe 13

Eine Zufallsvariable X nimmt die Werte 1 und -1 jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.5 an. Nun wird die Zufallsvariable Y definiert mit $Y := 3 + 2 \cdot X$.

a) Wie sieht die Verteilung von Y aus?

b) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X und Y.