3.3 Bevölkerungsprozessstatistik: Raten und Tafeln

Dynamik durch

- Zugänge (Geburt, Zuwanderung)
- Abgänge (Tod, Abwanderung)
- Bewegung zwischen Sektoren (ledig $\to$ verheiratet, erwerbstätig $\to$ nicht erwerbstätig, verschiedene geographische Regionen)

Beschreibung der Dynamik durch

- Anzahlen
- Raten (Anzahl bezogen auf Umfang)

3.3.1 Sterberate

Def. 3.1.

Sei $\tilde{A}(t)$ die Anzahl der Abgänge eines bestimmten Typs (nachfolgend Todesfälle) in $(0,t]$. Setzt man, wie durchgängig im Folgenden, $\tilde{A}(t)$ als differenzierbar voraus, so heißt

$$\tilde{a}(t) = \frac{d\tilde{A}(t)}{dt}$$

Abgangsfunktion (Abgangsintensität).

Mit $B(t)$ als Bestand zum Zeitpunkt t, ist die Abgangsrate definiert durch

$$r_{\tilde{\alpha}(t)} = \frac{\tilde{a}(t)}{B(t)}.$$

Operationalisierung der Sterberate:

- Approximation des Differentialquotienten durch den Differenzenquotient:

$$\tilde{a}(t) \approx \frac{\tilde{A}(t+1) - \tilde{A}(t)}{(t+1) - t} = \tilde{A}(t+1) - \tilde{A}(t) = S(t, t+1)$$

- Operationalisierung des Bevölkerungsbestands als Durchschnittsbestand in $(t, t+1]$:

$$\overline{B}(t, t+1) = \int\limits_{t}^{t+1} B(u) du$$

- Approximation von $\overline{B}(t, t+1)$ durch

$$\overline{B}(t, t+1) \approx \frac{B(t) + B(t+1)}{2} \approx B\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

Def. 3.2.

Unter Verwendung der obigen Approximationen heißt

$$m(t) = \frac{S(t, t+1)}{\overline{B}(t, t+1)}\, 1\,000$$

(operationale Form der) rohe(n) Sterberate (Sterbeziffer).

Auf Basis dieser Definition lassen sich altersspezifische Sterberaten bestimmen:

$$m_x(t) = \frac{S_x(t, t+1)}{\overline{B}_x(t, t+1)}\, 1\,000, \quad x = 0, 1, \ldots, 100.$$

$m(t)$ lässt sich als gewichtetes Mittel der $m_x(t)$ schreiben:

$$
\begin{aligned}
m(t) &= \frac{S(t,t+1)}{\overline{B}(t,t+1)} = \frac{\sum_{x=0}^{100} S_x(t,t+1)}{\overline{B}(t,t+1)} = \\
&= \sum_{x=0}^{100} \frac{S_x(t,t+1)}{\overline{B}(t,t+1)} \frac{\overline{B}_x(t,t+1)}{\overline{B}_x(t,t+1)} = \\
&= \sum_{x=0}^{100} m_x(t) \underbrace{\frac{\overline{B}_x(t,t+1)}{\overline{B}(t,t+1)}}_{=:g_x(t)}
\end{aligned}
$$

Die Höhe der rohen Sterberate wird sehr stark durch die Bevölkerungsstruktur beeinflusst. Daher werden für internationale Vergleiche häufig sog. standardisierte rohe Sterberaten verwendet, die auf Gewichten ($g_x^*(t),\ x = 0, \ldots, 100$) einer Referenzpopulation basieren.

3.3.2 Sterbetafeln

Idee:

- Eine Sterbetafel ist ein demographisches $Modell$ für die Sterblichkeitsverhältnisse einer Bevölkerung, die unabhängig von der konkreten Größe und Altersstruktur der Bevölkerung dargestellt werden.
- Es werden u.a. geschlechts- und altersspezifische „Sterbewahrscheinlichkeiten“ dargestellt.
- Sterbetafeln sind prognostisch verwendbar (z.B. zur Prämienkalkulation bei Lebensversicherungen).
- Kohorten- versus Periodensicht:
  - Kohortentafel: bildet den tatsächlichen Sterbeprozess einer bestimmten Kohorte vollständig ab. (Kohorte: reale Gesamtheit von Personen, z.B. $100\,000$ Lebendgeborene eines Jahrgangs)
  - Periodentafel: bildet die aktuellen Sterbeverhältnisse in allen Altersklassen ab.

Aufbau einer Sterbetafel:

- Tabellarische Darstellung der „Abgangsordnung" eines sich durch Todesfälle ständig reduzierenden Bevölkerungsbestandes.
- Wie viele von z.B. $100\,000 =: \ell_0$ Lebendgeborenen erreichen das Alter x?
- i.d.R. Periodentafel
- Notation: Das Argument t wird im Folgenden weggelassen.
- Sterbewahrscheinlichkeit:

$$q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x},$$

wobei ℓ_x der Anzahl der betrachteten Lebenden im Alter $x = 0, \ldots, 100$ entspricht.

q_x ist eine Schätzung der bedingten Wahrscheinlichkeit im Alter x zu sterben, wenn man das Alter x erreicht hat.

Es gilt:

$$q_x = \frac{2\,m_x}{2 + m_x} \quad \text{bzw.} \quad m_x = \frac{2\,q_x}{2 - q_x}.$$

Sterbetafel 2007/2009

Deutschland

Männlich*)

Vollendetes Alter	Sterbe- wahrscheinlichkeit vom Alter x bis x+1	Überlebens- wahrscheinlichkeit vom Alter x bis x+1	Überlebende im Alter x	Gestorbene im Alter x bis unter x+1	Von den Überlebenden im Alter x bis zum Alter x+1 durchlebte Jahre	Von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebende Jahre	Durchschnittliche Lebenserwartung im Alter x in Jahren
x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	$e_x l_x$	e_x
0	0,00406191	0,99593809	100 000	406	99 656	7 733 257	77,33
1	0,00035593	0,99964407	99 594	35	99 576	7 633 600	76,65
2	0,00019248	0,99980752	99 558	19	99 549	7 534 024	75,67
3	0,00015099	0,99984901	99 539	15	99 532	7 434 476	74,69
4	0,00014409	0,99985591	99 524	14	99 517	7 334 944	73,70
5	0,00011571	0,99988429	99 510	12	99 504	7 235 427	72,71
6	0,00010542	0,99989458	99 498	10	99 493	7 135 923	71,72
7	0,00009671	0,99990329	99 488	10	99 483	7 036 430	70,73
8	0,00009614	0,99990386	99 478	10	99 473	6 936 947	69,73

(Quelle: Statistisches Bundesamt)

- „Tafelfunktionen“:
  - Anzahl der Gestorbenen im Alter $x = 0, \ldots, 100$:

$$d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$$

  - Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit zwischen Alter x und Alter $x+1$:

$$q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} = 1 - \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{d_x}{\ell_x} \quad \text{bzw.} \quad p_x = 1 - q_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$$

  - Anzahl der von den Überlebenden im Alter x bis zum Alter $x+1$ durchlebten Personenjahre:

$$L_x = \ell_{x+1} + {}^1\!/_2\, d_x = {}^1\!/_2\, (\ell_x + \ell_{x+1})$$

– Anzahl der von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebenden Jahre:

$$T_x = \sum_{y=x}^{100} L_y$$

– durchschnittliche Restlebenserwartung der Überlebenden im Alter x:

$$e_x = \frac{T_x}{\ell_x}$$

Schätzung von Sterbewahrscheinlichkeiten:

- Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner: alle Sterbefälle eines Geburtsjahrganges, jedoch mit unterschiedlichen Gewichten
- Sterbejahrmethode von Raths: Sterbefälle eines Jahres, also auf zwei Geburtsjahrgänge bezogen
- Sterberatenmethode nach Farr: zunächst Schätzung altersspezifischer Sterberaten, die über die obige Formel in Sterbewahrscheinlichkeiten umgerechnet werden
- Die Schätzungen der Sterbewahrscheinlichkeiten werden in der Praxis meist noch (z.B. durch Splines) geglättet.