

Seismology - A statistical Vignette(Vorbereitungsmaterial)

Benedikt Seifert

19. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Vorauselende Gedanken	3
2	Kleine Einführung in die Seismologie	3
2.1	Grundbegriffe	3
2.2	Seismische Wellen	4
2.3	Magnitudenmessung(Richter-Skala)	4
3	Wichtige seismologische Konzepte	5
3.1	Richters Law	5
3.2	Omoris Law	6
4	Statistik in der Seismologie	6
4.1	Der Poisson Prozess	6
4.1.1	Voraussetzungen und allgemeine Annahmen	6
4.1.2	Zählprozesse	7
4.1.3	Poisson Prozess	7
4.1.4	Inhomogene Poisson Prozesse	9
4.2	Seismic Quiescence	9
4.2.1	Erklärung	9
4.2.2	statistische Modelle	9
4.2.3	Ergebnisse	10
5	Quellen	12

1 Vorseilende Gedanken

Seismologie ist heutzutage weitestgehend aus den Nachrichten bekannt, wenn es um das Auftreten eines größeren Erdbebens geht. Es ist auch so, dass die Erforschung und Versuche der Prädiktion von Beben einen Großteil der seismologischen Fragestellung ausmachen. Auch wenn bereits in China 900 n.Chr. erste 'Seismometer' entwickelt worden sind, ist diese Disziplin gar nicht so alt. Große Fortschritte begannen um 1930, als Methoden entwickelt worden sind Erdbeben quantitativ auf ihren Entstehungspunkt rückführend zu messen. Diese Seminararbeit baut auf dem Artikel von D. Vere Jones auf, in dem zuerst eine kleine Historie der Seismologie an sich zu finden ist, dem einige Auszüge aus der aktuellen Forschung dieses wissenschaftlichen Bereiches folgen. In meiner Arbeit werde ich nun zuerst versuchen eine kurze doch akurate Einführung in die wichtigsten Aspekte der Seismologie zu geben und Konzepte, welche für die statistischen Vorgehensweisen nötig sind anzureißen. Danach im statistischen Teil wird zuerst ein theoretischer Exkurs über Zählprozesse folgen insbesondere dem Poisson Prozess. Dem schließt sich ein Forschungsbeispiel von Matsu'ura an, welches in Vere-Jones behandelt worden ist, mit dem Versuch auch dabei die statistischen Modelle dahinter nicht aus den Augen zu lassen.

2 Kleine Einführung in die Seismologie

2.1 Grundbegriffe

Um über seismologische Thematiken vor einem statistischen Hintergrund sprechen zu können, müssen zuerst einige grundlegende Begriffe aus dem Bereich der Seismologie erklärt und aufgeführt werden.

Allgemein bekannt sollte sein, dass Erdbeben durch tektonische Verschiebung der Kontinentalplatten und dadurch entstehende Spannung ausgelöst werden. Diese Spannungen werden dann ruckartig freigesetzt und somit wird auch die gespeicherte Energie losgelassen.

Es wird davon ausgegangen, dass Erdbeben Punktereignisse sind, mit einem klar bestimmbareren Entstehungsort, dem sogenannten Hypozentrum. Bildet man diesen Punkt auf der Erdoberfläche ab, so spricht man vom Epizentrum des Erdbebens.

Damit überhaupt Schlüsse aus solchen Ereignissen gezogen werden können, muss natürlich eine Messung erfolgen. Im Falle von Erdbeben wird die Bewegung der Erdoberfläche gemessen, dies geschieht durch Seismometer. Diese Geräte messen die Abweichung der Oberfläche von ihrem Ruhepunkt in drei aufeinander orthogonalen Richtungen, also Höhe, Nord-Süd und West-Ost Richtung.

Gemessen wird somit die Amplitude, also der Ausschlag des Seismometers in 0.001 mm (= 1 Mikron). Da die Amplitude nur ein Wert für die (lokale) Stärke des Erdbebens ist und man für eine objektive Beschreibung und Quantifizierung solcher Ereignisse besser eine Größe hat, die sich nicht an jedem Ort unterscheidet, rechnet man von der Amplitude auf die Magnitude zurück. Diese liefert für jedes Beben einen äquivalenten Wert

der freigesetzten Energie im Hypozentrum.

Nun stellt sich natürlich die Frage, wie überhaupt ein Hypozentrum bestimmt wird und dann dessen Magnitude berechnet werden soll. Um diese Frage zu beantworten muss zuerst ein wenig auf die Theorie der seismischen Wellen eingegangen werden.

2.2 Seismische Wellen

Energie wird in physikalischen Körpern meist durch Wellen übertragen, bei Erdbeben ist das nichts anderes. Vom Punkt ihres Auftretens breiten sich demnach Wellen verschiedenster Artigkeit aus, die für die Bestimmung der Lage von Zentren von Bedeutung sind, die p- und s-Wellen.

p-Wellen sind Longitudinal- oder Kompressionswellen, sie werden durch Verdichtung des Körpers übertragen. Bildlich kann man sich das an einer Feder vorstellen, der ein Impuls gegeben wird, der der Richtung ihrer Lage entspricht. Diese Wellen breiten sich im Medium (also hier dem Erdinneren) mit 5000 - 8000 m/s aus, sie kommen bei den Messstationen stets früher an als s-Wellen, daher rührt der Präfix p für Primär, s für Sekundär.

Die s-Wellen dagegen sind sogenannte Scherwellen, oder auch Transversalwellen. Ihre Ausbreitung erfolgt durch Auf- und Absenken des Mediums, vorstellbar wie ein Seil, welches an zwei Punkten festgemacht wurde und man nun eine Auf- und Abbewegung an einem dieser Punkte ausführt. Die Geschwindigkeit dieser Wellen beträgt etwa 3000 - 4500 m/s.

Die Vorgehensweise ist nun die, dass aus der Differenz zwischen dem Auftreten dieser beiden Wellenarten auf die Distanz zwischen der Messstation und dem Zentrum der Ausbreitung geschlossen werden kann. Die Distanz ist damit bestimmt, jedoch nicht der genaue Ort, dieser kann nun durch geometrische Konstruktion bestimmt werden. Dazu werden also drei solcher Stationen mit der berechneten Distanz benötigt. Um sie werden Kreise gezogen mit dem Radius entsprechend der Entfernung vom Beben, der Schnittpunkt dieser Kreise dem Epizentrum. Das ist die Theorie, in der Praxis muss klarerweise noch die Zusammensetzung des Bodens und dergleichen herausgerechnet werden.

Erschwerenderweise kommt noch hinzu, dass diese Wellen, ähnlich der Optik, vom Erdkern, Erdmantel usw. reflektiert und refraktiert werden und sie sich in den unterschiedlichen Medien mit anderer Geschwindigkeit ausbreiten. Das soll uns für die grundlegende Theorie, allerdings nicht weiter beschäftigen. (Jeffreys)

2.3 Magnitudenmessung(Richter-Skala)

Nachdem wir nun unseren Ausbreitungspunkt gefunden haben, interessiert uns die Energiefreisetzung bzw. eine dazu äquivalente Abbildung. Bereits mehrere Seismologen wiesen darauf hin, dass solch ein Maß gebraucht werde, um eine objektive Auswertung zu erreichen und wegzukommen von der Messung in Intensitätsskalen, wie der Mercalli Skala, die das Beben in Stärkegrade einteilt, ähnlich der bekannten Windstärkeskala. Die bekannteste und zugleich erste Vorgeschlagene dieser Magnitudenskalen ist die Richterskala.

Sie wurde von Charles Francis Richter und Beno Gutenberg erarbeitet, bei der Beobachtung von Chicagoer Erdbeben.

$$M_L = \log_{10} \left(\frac{A_{max}}{A_0} \right)$$

M_L bezeichnet die Magnitude (in der Seismologie auch Lokalbeben Magnitude genannt, daher das L im Index), A die Amplituden, wobei der Maximalausschlag des Seismometers durch den Normalwert geteilt wird.

Davon wird der dekadische Logarithmus gebildet, das heißt eine Erhöhung der Magnitude um eine Einheit setzt eine um den Faktor 10 gesteigerte Messung der Amplitude voraus. Richter legte damals eine Skala bei, die jeder Entfernung einen Wert zuordnete, der dem Wert entspricht, mit dem das *standard torsion seismometer*, ausgibt, ein Beben registriert, welches 100km entfernt stattfindet, mit einer Amplitude von 1 Mikron. 100km daher, da nähere Messungen meist sehr ungenau ausfallen.

Zu kritisieren an dieser Skala ist, dass sie, aufgrund des Forschungsortes von Richter eigentlich nur für die Nähe um Chicago gilt und Magnituden > 6.5 nicht exakt gemessen werden können, da eine sogenannte Übersättigung des Bebens stattfindet.

Heutzutage werden daher andere Skalen benutzt, obwohl in Nachrichten immer von der nach oben offenen Richter-Skala zu hören ist, was ebenfalls nicht ganz richtig ist, da Erdbeben mit Magnitude > 10 technisch gar nicht möglich sind. (Richter C.F.)

3 Wichtige seismologische Konzepte

3.1 Richters Law

Nachdem er eine Magnitudenskala entwickelt hat, zielte weitere Forschung von Richter darauf ab, die Häufigkeiten für das Auftreten von Erdbeben mit bestimmten Magnituden zu schätzen. Die Beobachtung von Daten aus dem Areal in Kalifornien brachten ihn auf den Zusammenhang:

$$\log_{10} N = a + b(8 - M)$$

N die Anzahl der Beben, M Wert der Magnitude.

Bei Ogata findet sich folgende Alteration:

$$\log_{10} F(M) = a - bM$$

F(M) aufgefasst als die Häufigkeit für das Auftreten eines Bebens mit Magnitude $\geq M$

Die 8 von Richter mag daher kommen, dass er diesen Wert als Maximal angesehen hat (eigene Vermutung). Zumindest kommt in seinem Artikel kein Wert > 7.7 vor.

Betrachten wir nun die zweite Fassung des 'Gesetzes':

Die Formel besagt, dass die Häufigkeiten für das Auftreten eines Bebens mit Magnitude

> M pro Zuwachs von M logarithmisch abnimmt für eine affine Funktion von M. Im Allgemeinen nimmt b einen Wert um 1 an und a wird als nicht besonders wichtig bzw. aussagekräftig angenommen. D.h. für einen Wert $b > 1$ ist eine geringere seismische Belastung zu erwarten als bei Werten < 1 .

Das wird bei der *seismic quiescence* Analyse von Matsu'ura später noch von Bedeutung sein. (Richter C.F.)

3.2 Omori Law

Die modifizierte Omori Formel befasst sich mit der Häufigkeit des Auftretens von Nachbeben bezüglich der vergangenen Zeit.

Erdbeben treten meist geclustert auf, das kann in Form von mehreren größeren Erdbeben sein, oder eben Nachbeben, die von einem großem Beben getriggert wurden. Diese treten auf, da nach der Spannungsentladung des vorangegangenen großen Bebens zwar die Hauptspannung zwischen den tektonischen Platten abgebaut ist, aber durch ständige Bewegung immer noch Spannung besteht, diese allerdings nicht so hoch ist, wie beim Hauptbeben. Ebenso gibt es Vorbeben, die ein größeres Beben ankündigen können, mehr dazu wieder im Kapitel über Matsu'uras Forschung.

modifizierte Omori-Formel:

$$n(t) = \left(\frac{K}{(t + c)^p} \right)$$

mit K,c,p Parameter

(Ogata 1988)

Die Anzahl der Nachbeben ist also hyperbolisch mit der Zeit verknüpft, der Graph der kumulativen Anzahl an Nachbeben wird mit steigendem t immer flacher.

4 Statistik in der Seismologie

4.1 Der Poisson Prozess

4.1.1 Voraussetzungen und allgemeine Annahmen

Nachdem wir uns nun über die seismologischen Begriffe, die wir für unsere statistische Arbeit benötigen, im Klaren sind, können wir uns mit Methoden aus der Statistik befassen. Zuerst dem Poisson Prozess, der eine gute Modellierung für das Auftreten von Erdbeben liefert. Grundlegende Annahmen dafür sind, dass Erdbeben als Punktprozesse auftreten, wie wir in den vorhergehenden Kapiteln schon gesehen haben. Sie haben einen bestimmbaren Ausgangspunkt zu einer sicheren Zeit. Für die Modellierung als Poisson Prozess interessiert uns die Magnitude nur insofern, wie wir einen Cutpoint setzen können, um die nicht für die Analyse relevanten Erdbeben auszuwählen, bspw. Magnitude > 4 für spürbare Beben. Wichtiger hier ist vielmehr die Zeit des Auftretens, bzw. die Zeit die zwischen zwei Ereignissen vergangen ist.

Weiterhin gehen wir davon aus, dass das Auftreten von Erdbeben unabhängig voneinander erfolgt, inwiefern das wirklich so ist, ist sehr fraglich, wenn man allein schon davon ausgeht, dass Nachbeben von Hauptbeben getriggert werden.

Auch nehmen wir an, dass das Auftreten von Ereignissen zum Zeitpunkt t_i genauso verteilt ist wie zum Zeitpunkt t_j , $\forall i \neq j$. Das ist ebenso fraglich, wenn man später die Ergebnisse von Matsu'ura betrachtet. Jedoch gehen wir nun von dem einfachsten möglichen Modell aus, um die Auftrittswahrscheinlichkeiten von Beben zu beschreiben.

4.1.2 Zählprozesse

Zählprozesse sind eine Untergruppe der stochastischen Prozesse. Diese sind Realisierungen von ZVen bezüglich der Zeit und/oder des Raumes, die Abbildung solcher Prozesse bezeichnet man als Pfade oder Trajektorien. Speziell die Zählprozesse interessieren sich zunächst nicht für die Raumkoordinaten des Ereignisses, sondern lediglich für das Auftreten des Ereignisses in der Zeit. Ein Zählprozess besteht aus

$$\{S_n \in \mathbb{N}\}$$

S_n ist der Zeitpunkt des nten Ereignisses und

$$\{T_n \in \mathbb{N}\}$$

den Zwischenankunftszeiten, also der Wartezeit zwischen zwei Ereignissen. Daraus ergibt sich der Zusammenhang

$$T_n = S_n - S_{n-1}$$

Der Zählprozess selbst wird somit beschrieben als kumulierte Summe der aufgetretenen Ereignisse bis zum Zeitpunkt t

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_{(0,t]}(S_n)$$

Es werden also die Ereignisse in $(0, t]$ "gezählt".
Es gilt

$$S_n < S_{n+1} \Leftrightarrow T_n > 0$$

Es wird festgelegt, dass es keine gleichzeitig auftretenden Ereignisse gibt. (Fahrmeir)

4.1.3 Poisson Prozess

Ein Spezialfall der Zählprozesse, stellt der Poisson Prozess dar.

Für die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Ereignisse gilt

$$P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

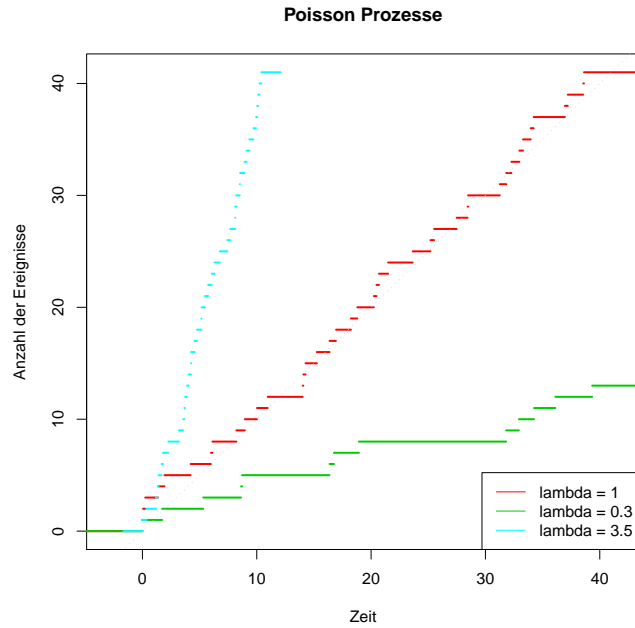


Abbildung 1: drei verschiedene simulierte Pfade von Poisson Prozessen

also

$$N(t) \sim Po(\lambda t)$$

mit λ der Intensität des Prozesses.

Für Poisson Prozesse gilt ebenso:

$N(t)$ ist Poisson Prozess \Leftrightarrow die Zuwächse sind abhängig und stationär wobei Unabhängigkeit von Zählprozessen definiert ist als

$$S_1 - S_0, \dots, S_n - S_{n-1}$$

unabhängig ist für alle $S_0 < S_1 < \dots < S_n$

Stationarität

$$S_2 - S_1 \sim S_{2+t} - S_{1+t}$$

für alle $t > 0$ und $S_1 < S_2$

Die Verteilung bleibt über die Zeit also die Gleiche und die Zwischenwartezeiten hängen nicht voneinander ab.

Für die $T(n)$ gilt

$$T(n) \sim Exp(\lambda)$$

4.1.4 Inhomogene Poisson Prozesse

Will man die Annahme der Stationarität des Poisson Prozesses etwas verallgemeinern, so lässt man eine Veränderung von λ über die Zeit t zu.

$$\lambda(t), t \geq 0$$

Diese Art von Poisson Prozessen nennt man inhomogene Poisson Prozesse. Es gilt

$$P(N(t+s) - N(t) = n) = \frac{(\Lambda(t+s) - \Lambda(t))^n}{n!} \exp(-(\Lambda(t+s) - \Lambda(t)))$$

mit

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$$

Diese Verallgemeinerung lässt eine Änderung von λ über die Zeit zu. Damit gilt

$$N(t+s) - N(t) \sim Po \left(\int_t^{t+s} \lambda(u) du \right)$$

4.2 Seismic Quiescence

4.2.1 Erklärung

Seismic Quiescence bezeichnet den Zeitraum vor einem größeren Erdbeben, in dem die seismologische Aktivität abnimmt. Es ist jedoch unter Seismologen umstritten, ob so ein Phänomen überhaupt auftritt, bzw. ob die Beobachtung von abnehmender Seismizität von Nachbeben überhaupt einen Informationsvorteil darstellt hinsichtlich der Prädiktion von größeren Nachbeben.

4.2.2 statistische Modelle

Die statistische Vorgehensweise der Auswertung von japanischen Nachbebendaten sah vor

- Maximum Likelihood Schätzung der Parameter der modifizierten Omori Formel
- Vergleich der verschiedenen Modelle mit Hilfe des AIC
- grafische Analyse

Die modifizierte Omori Formel

$$n(t) = \frac{K}{(t+c)^p}$$

hatte drei Parameter K, c, p . Da die Nachbebenraten deswegen einem inhomogenen Poisson Prozess folgen muss man mit Maximum Likelihood folgendes Problem maximieren

$$L(K, c, p | t_0, t_1, \dots, t_N) = \prod_{i=1}^N n(t_i) \exp \left(- \int_{t_0}^{t_N} n(s) ds \right)$$

der log-Likelihood entsprechend

$$\ln L(K, c, p | t_0, t_1, \dots, t_N) = \sum_{i=1}^N \ln n(t_i) - \int_{t_0}^{t_N} n(s) ds$$

mit t_i Zeitpunkt des i -ten Bebens, N Anzahl der Beben

Nun wurden drei Modelle voneinander unterschieden, welche die Seismizität betrafen. Diese Modelle überprüfen ob sich die Daten ab einem bestimmten Zeitraum anders verhalten, als zur Zeit davor.

$$n(t) = \begin{cases} \frac{K_0}{(t+c_0)^{p_0}} & \text{wenn } t \leq T_c \\ \frac{K_c}{(t+c_c)^{p_c}} & \text{wenn } t > T_c \end{cases} \quad (1)$$

$$n(t) = \begin{cases} \frac{K_0}{(t+c_0)^{p_0}} & \text{wenn } t \leq Q \\ \frac{K_Q}{(t+c_Q)^{p_Q}} & \text{wenn } Q < t \leq R \\ \frac{K_R}{(t+c_R)^{p_R}} & \text{wenn } R < t \end{cases} \quad (2)$$

$$n(t) = \begin{cases} \frac{K_0}{(t+c_0)^{p_0}} & \text{wenn } t \leq Q \vee R < t \\ \frac{K_Q}{(t+c_Q)^{p_Q}} & \text{wenn } Q < t \leq R \end{cases} \quad (3)$$

Modell 1 überprüft auf eine Änderung der Parameter nach einem bestimmten Zeitpunkt T_c . Die Modelle 2 und 3 gehen von zwei bestimmbareren Zeitpunkten aus. Q dort beginnt die quiescence und R , die quiescence geht wieder zurück, der alte Zustand wird reconvert.

Bei Modell 2 stellen sich vor und nach der quiescence zwei verschiedene Zustände ein, wohingegen bei Modell 3 der alte Zustand vor der quiescence wieder erreicht wird.

(Matsu'ura, 1986) Verglichen wurden die drei Modelle mit Hilfe des AIC

$$AIC = -2 \max(\ln \text{likelihood}) + 2(\text{number of parameters})$$

4.2.3 Ergebnisse

Durch diese Art der Auswertung, ist es Matsu'ura gelungen für bestimmte Bedingungen eine Existenz der seismic quiescence zu bestätigen. Die b -Werte in Richters Law nehmen zu. Das bedeutet, dass durch Echtzeitüberwachung der Parameter aus der modifizierten

Omori Formel eine Vorhersage von größeren Nachbeben möglich ist. Im Ausgangstext von Vere-Jones ist sogar von solchen *real-time warnings* die Rede.

5 Quellen

Charles F. Richter(1935)
An instrumental Earthquake Magnitude Scale

Charles F. Richter
Frequency of Earthquakes in California

D. Vere-Jones(2000)
Seismology - A statistical Vignette

Harold Jeffreys
Seismology

Yosihiko Ogata(1988)
Statistical Models for Earthquake Occurrences and Residual Analysis for Point Processes

Ritsuko S. Matsu'ura(1986)
Precursory Quiescence and Recovery of Aftershock Activities before some large Aftershocks

Ludwig Fahrmeir, Gunter Raßer, Thomas Kneib(2011)
Skript zur Vorlesung Stochastische Prozesse