**Aufgabe 1**

Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \underbrace{\int_0^\infty xf(x)dx}_{E_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^0 xf(x)dx}_{E_2} \\
&= E_1 + E_2 \\
&\overset{f symmetrisch}{=} E_1 - E_1 \\
&= 0 \text{ falls } E_1 < \infty.
\end{aligned}$$

$E(X)$ existiert nicht, falls $E_1 = \infty$.

a) k=1:

$$\begin{aligned}
E_1 &= c \cdot \int_0^\infty x \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx \\
&= c \cdot \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} \\
&\geq \int_1^\infty \frac{x}{1+x^2} dx \\
&\geq c \cdot \int_1^\infty \frac{x}{x^2+x^2} dx = c \cdot \int_1^\infty \frac{1}{2x} dx = \infty.
\end{aligned}$$

b) k >1:

$$\begin{aligned}
E_1 &= c \cdot \int_0^\infty x \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx \\
&= \underbrace{c \cdot \int_0^1 x \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx}_{=:I<\infty} + c \cdot \int_1^\infty x \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx \\
&= I + c \cdot \int_1^\infty \left(x^{-\frac{2}{k+1}}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx \\
&= I + c \cdot \int_1^\infty \left(x^{-\frac{2}{k+1}} + \frac{x^{2-\frac{2}{k+1}}}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx \\
&\leq I + c \cdot \int_1^\infty \left(\frac{x^{2-\frac{2}{k+1}}}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx \\
&= I + c \cdot \int_1^\infty \frac{x^{-(k+1)+1}}{k^{-\frac{k+1}{2}}} dx \\
&= I + \tilde{c} \int_1^\infty x^{-k} \ < \infty \quad \text{da } k > 1.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Für $k > 1$ existiert der Erwartungswert und ist aus Symmetriegründen 0.
Varianz: a) k=1: Varianz existiert nicht.
b) k>1:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) \overset{\text{wie b)}}{=} I + c \cdot \int_1^\infty x^2 \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx \\
&= I + c \cdot \int_1^\infty \left(x^{-\frac{4}{k+1}} + \frac{x^{-\frac{4}{k+1}+2}}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx \\
&\leq I + \tilde{c} \int_1^\infty x^{1-k} dx < \infty \quad \text{für } k > 2
\end{aligned}$$

analog für $k = 2$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= I + c \cdot \int_1^\infty \left( x^{-\frac{4}{k+1}} + \frac{x^{-\frac{4}{k+1}+2}}{k} \right)^{-\frac{k+1}{2}} dx \\
&\geq I + c \cdot \int_1^\infty \left( x^{-\frac{4}{k+1}+2} + \frac{x^{-\frac{4}{k+1}+2}}{k} \right)^{-\frac{k+1}{2}} dx \\
&= I + c \cdot \int_1^\infty \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) x^{-\frac{4}{k+1}+2} \right)^{-\frac{k+1}{2}} dx \\
&= I + \tilde{c} \int_1^\infty x^{1-k} = \infty \qquad \text{für } k = 2.
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Für $k > 2$ existiert die Varianz.
$X$ ist darstellbar als $X = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}$ mit $Z \sim N(0,1)$ und $U \sim \chi_k^2$, stochastisch unabhängig.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\left( \left( \frac{Z}{\sqrt{U/k}} \right)^2 \right) = \mathbb{E}\left( \frac{k \cdot Z^2}{U} \right) \\
&\overset{Satz 7.12}{=} k \cdot \mathbb{E}(Z^2) \cdot \mathbb{E}\left(\frac{1}{U}\right) = k \cdot \mathbb{E}\left(\frac{1}{U}\right) \overset{*}{=} \frac{k}{k-2},
\end{aligned}
$$

denn $Z^2 \sim \chi_1^2$ und $Z^2$ und $\frac{1}{U}$ stu. (Satz 7.11)

*:

$$
\begin{aligned}
Y: &= \frac{1}{U}, \quad g(u) = \frac{1}{u}, \quad g^{-1}(y) = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial h(y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \\
f_Y(y) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{k}{2}-1} \exp(-\frac{1}{2y}) \cdot \frac{1}{y^2} \\
& \quad Substitution: \quad v = \frac{1}{2y}, \quad y = \frac{1}{2v}, \quad \frac{dy}{dv} = -\frac{1}{2v^2}, \quad dy = -\frac{1}{2v^2} dv \\
\mathbb{E}(Y) &= \int_0^\infty y \cdot f_Y(y) dy \\
&= -\int_\infty^0 \frac{1}{2v} \cdot f_Y\left(\frac{1}{2v}\right) \frac{dv}{2v^2} \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2v} \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}-1} v^{\frac{k}{2}-1} \cdot \exp(-v) \cdot \frac{4v^2}{2v^2} dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}-1} \int_0^\infty v^{\frac{k}{2}-1-1} \exp -v dv \\
&= \frac{\Gamma(\frac{k}{2}-1)}{\Gamma(\frac{k}{2})} \cdot 2^{\frac{k}{2}-\frac{k}{2}-1} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{k}{2}-1)}{\left(\frac{k}{2}-1\right)\Gamma(\frac{k}{2}-1)} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{k-2}.
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 4**

$$X_n(\omega) = n^3 \cdot I_{[0,\frac{1}{n^2}]}(\omega)$$

Sei $\omega$ fest. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0$ mit

$$\forall n > n_0 : \frac{1}{n^2} < \omega,$$

also

$$\forall n > n_0 : |X_n(\omega) - 0| = 0 < \varepsilon,$$

d.h. $X_n$ konvergiert. Da $\omega$ beliebig war, konvergiert $X_n$ für alle $\omega \in \Omega$, also fast sicher gegen 0.
aber:

$$\mathbb{E}(|X_n - 0|) = n^3 \cdot \frac{1}{n^2} = n \quad \nrightarrow \quad 0.$$