Aufgabe 1

...

Aufgabe 2

Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ein translationsinvariantes Maß. Zeigen Sie, dass für beliebige Intervalle $]a, b]$ notwendigerweise gelten muss:

$$\mu(]a, b]) = \mu(]0, 1]) \cdot (b - a).$$

Hinweis: Betrachten Sie erst Intervalle der Form $]0, \frac{1}{n}]$, dann Intervalle mit rationalen Endpunkten und zum Schluss beliebige Intervalle.

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mu\left(]0,1]\right) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\left]0, \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= n \cdot \mu\left(\left]0, \frac{1}{n}\right]\right) \\
\Longrightarrow \mu\left(\left]0, \frac{1}{n}\right]\right) &= \frac{1}{n}\mu\left(]0,1]\right).
\end{aligned}$$

Für $p \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left]0, \frac{p}{n}\right]\right) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{p} \left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \\
&= p \cdot \mu\left(\left]0, \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= \frac{p}{n}\mu\left(]0,1]\right)
\end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ existiert eine rationale Folge $q_n \downarrow x$ und mit der Stetigkeit von oben folgt:

$$\begin{aligned}
\mu\left(]0,x]\right) &= \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]0, q_n]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(]0, q_n]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} q_n \cdot \mu(]0,1]) = x \cdot \mu(]0,1]).
\end{aligned}$$

Schließlich folgt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

$$\mu\left(]a,b]\right) = \mu\left(]a-a, b-a]\right) = \mu(]0, b-a] = (b-a) \cdot \mu(]0,1]).$$