Aufgabe 1

Bei der Lufthansa ist aus Erfahrung bekannt, daß etwa 18% der Fluggäste ihre gebuchte Reise nicht antreten. Um die Auslastung der Flugzeuge möglichst hoch zu halten, werden mehr als die verfügbaren 150 Plätze in einem Airbus A320 verkauft.

1. Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Passagier nicht mitgenommen werden kann, wenn 170 Plätze verkauft werden.
2. Wieviele Plätze sollte die Lufthansa maximal verkaufen, wenn die Wahrscheinlichkeit für ein solches Mißgeschick kleiner 0.01 sein soll?

Hinweis: Nehmen Sie an, daß die Entscheidungen über das Antreten der Reise zwischen den einzelnen Passagiere unabhängig sind. Desweiteren in R: $\Phi(x) =$ `pnorm(x)` und $\Phi^{-1}(x) =$ `qnorm(x)`.

Aufgabe 2

Es seien $X_1, \dots, X_n$ stu mit $X_i \sim U(0,1)$ für alle $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, daß

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} c$$

und bestimmen Sie die Konstante c.

Aufgabe 3

Sei $X \sim U[0,\pi]$. Berechnen Sie die Dichte der Größe

$$Y = \sin(X).$$

Aufgabe 4

Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $X_i \sim \operatorname{Exp}(\lambda),\ \lambda > 0$.

Berechnen Sie die Dichte von $\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie explizit, dass $\overline{X}_n \xrightarrow{P} 1/\lambda$ gilt.