Aufgabe 1

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der t-Verteilung. Erklären Sie genau für welche Freiheitsgrade k der Erwartungswert und die Varianz nicht existieren.

Aufgabe 2

Sei X eine t-verteilte Zufallsvariable mit k Freiheitsgraden. Zeigen Sie, daß $Y = X^2$ einer F-Verteilung mit Freiheitsgraden 1 und k folgt. Welche Verteilung hat $1/Y$?

Aufgabe 3

Gegeben sei der Maßraum $\Omega = [0,1]$ mit der zugehörigen Borelschen Spur-σ-Algebra und Borelschem Spur-Maß $P = \lambda|_{[0,1]}$. In anderen Worten P ist gleichverteilt auf $\Omega = [0,1]$. Jede natürliche Zahl hat die eindeutige Binärdarstellung $n = \sum_{i=0}^{j} c_i 2^i$, wobei $j = j(n)$ die größte ganze Zahl mit $2^j \leq n$ ist. Definieren Sie die Menge

$$A_n = \left[\frac{n-2^j}{2^j}, \frac{n+1-2^j}{2^j}\right]$$

und betrachten Sie die Folge von Zufallsvariablen

$$X_n(\omega) = 1_{A_n} \quad \text{bzw.} \quad Y_n(\omega) = j(n)1_{A_n} \quad Z_n(\omega) = 2^{j(n)}1_{A_n}$$

dazu.

1. Geben Sie jeweils die Zähldichten von X_n,Y_n und Z_n an. Zeigen Sie explizit, daß $X_n \xrightarrow{D} 0, Y_n \xrightarrow{D} 0$ und $Z_n \xrightarrow{D} 0$ gilt.
2. Zeigen Sie, daß $X_n \xrightarrow{P} 0$ gilt. Ist auch $Y_n \xrightarrow{P} 0$ bzw. $Z_n \xrightarrow{P} 0$ erfüllt? Zeigen Sie, daß keine der drei Folgen fast sicher konvergiert!
3. Für welche $r \geq 1$ gilt jeweils $X_n \xrightarrow{r} 0$,$Y_n \xrightarrow{r} 0$ und $Z_n \xrightarrow{r} 0$?

Aufgabe 4

Geben Sie ein Beispiel für eine Folge von Zufallsvariablen X_n mit $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ an, für die X_n nicht im ersten Moment gegen X konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie das Beispiel aus der Vorlesung in dem

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{1} X$$

gezeigt wurde und adaptieren Sie das Beispiel derart, daß $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ sicher gestellt ist.