Aufgabe 1

Gegeben sei eine bivariate diskrete Wahrscheinlicheitsverteilung auf $\Omega = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$ durch $P(X = i, Y = j)$:

i \ j	0	1	2
0	2/20	1/20	3/20
1	2/20	2/20	a
2	4/20	1/20	b

1. Wie müssen a und b gewählt werde, damit $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$?
2. Sind X und Y dann unabhängig? (Begründung!)

Aufgabe 2

Sei der Vektor $X = (X_1, X_2)$ bivariat standardnormal-verteilt. Berechne die Verteilung des transformierten Vektors (Y, W) mit

$$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \quad W = \mathrm{sgn}(X_2) \cdot \arccos(X_1/Y).$$

Aufgabe 3

Seien U und V stochastisch unabhängig und jeweils Gamma-verteilt, $U \sim \Gamma(k_1, \lambda)$ und $V \sim \Gamma(k_2, \lambda)$. Zeige, dass $\frac{U}{U+V}$ Beta-verteilt ist mit Parametern k_1 und k_2.

Hinweis: Vergleiche die Berechnung der Dichten der F-Verteilung und der t-Verteilung in der Vorlesung. Verwende

$$(x, y) = g(u, v) = \left(\frac{u}{u+v}, u+v\right)$$

Aufgabe 4

Sei X eine zweidimensional normalverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie daß

$$D^{-1}(X - \mu)$$

zentral normalverteilt ist und die Korrelationsmatrix von X als Kovarianzmatrix hat. Dabei ist D die Diagonalmatrix der Standardabweichungen von X und μ der zugehörige Erwartungswertvektor.