Aufgabe 1

Auf dem Einheitskreis im 1. Quadranten des Koordinatensystems

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

sollen Zufallszahlen erzeugt werden. Dabei werde so vorgegangen, dass zunächst die x-Koordinate des Punktes $p = (x, y)$ aus einer Gleichverteilung auf $[0, 1]$ gezogen wird und anschließend die y Koordinate, auch aus einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, \sqrt{1 - x^2}]$.

Betrachten Sie nun die Abstände r der so entstehenden Punkte zum Koordinatenursprung und berechnen Sie die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen

$$Z := \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Dichtetransformationssatzes.

Aufgabe 2

Seien X_1 und X_2 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, und $Z = X_1 + X_2$

- Zeige für X_i Poisson verteilt, jeweils mit Parameter λ_i, dass Z auch wieder Poisson verteilt, mit Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$
- Berechne die Dichte von Z, wenn beide X_i exponential-verteilt sind mit dem jeweils gleichen Parameter λ.

Aufgabe 3

Sei X gammaverteilt mit der Dichte

$$f_X(x; a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\, x^{a-1} \exp(-bx), \quad x > 0, a > 0, b > 0.$$

Bestimmen Sie anhand des Transformationssatzes für Dichten die Dichte der Zufallsvariablen

$$Y = g(X) = \frac{1}{X}.$$

Aufgabe 4

Es seien X_1 und X_2 unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. $X_1 \sim Exp(\lambda)$ und $X_2 \sim Exp(\lambda)$.

Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $R = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$.

Hinweis: Gehen Sie analog wie in Beispiel 7.4 im Skript vor und definieren Sie zum Beispiel $g(x_1, x_2) = \left(\dfrac{x_1}{x_1 + x_2}, x_1\right)$.