Aufgabe 1

Seien A und B zwei Ereignisse und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(A) \quad \in \quad \left[\min\{\mathbb{P}(A|B), \mathbb{P}(A|\bar{B})\} \quad , \quad \max\{\mathbb{P}(A|B), \mathbb{P}(A|\bar{B})\}\right]$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, falls alle bedingten Wahrscheinlichkeiten gleich den unbedingten Wahrscheinlichkeiten und ungleich Null sind.

Aufgabe 2

Sei X eine poissonverteilte Zufallsvariable mit $X \sim P(\lambda)$, d.h. $f_X(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$, $x \in \mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und Varianz von X.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$Y = \frac{1}{1+X} \text{ und } Z = \frac{X}{1+X}.$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Geometrische Verteilung mit Zähldichte $f(x) = pq^{k-1}$, gegeben $0 < p < 1$

a) Zeigen Sie daß es sich tatsächlich um ein Wahrscheinlichkeitsmaß handelt. (Hinweise: $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1/(1-a)$ für $|a| < 1$)

b) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion M(s) mit Definitionsbereich.

c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz einer geometrisch verteilten Zufallsvariable unter Verwendung von Satz 5.11.

d) Weisen Sie nach, daß für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit gilt.

Aufgabe 4

(a) Sei X eine diskret gleichverteilte Zufallsvariable auf $\{1, \ldots, n\}$. Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion.

(b) Sei Y eine stetig gleichverteilte Zufallsvariable auf dem Intervall $[1, n]$. Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion.