Aufgabe 1

Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum.

a) Es seien $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Zeigen Sie, dass

$$(\lambda_1 \mathbb{P}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbb{P}_n)(A) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{P}_i(A)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist.

b) Entscheiden Sie, ob dies auch gilt, wenn in a) eine Folge $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen und eine Folge $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset [0,1]$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ betrachtet werden.

Aufgabe 2

Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $f_\gamma : \Omega \to [0, \infty], \gamma > 0$ mit

$$f_\gamma(\omega) = c\frac{\gamma^{-\omega}}{\omega}.$$

Bestimmen Sie c so, daß $\mathbb{P}_\gamma = f_\gamma \odot \mu_Z$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Berechnen Sie für $\gamma = 1.01$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_\gamma(\{1, 2, \ldots, 20\})$.
Hinweis:

$$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n \quad \forall x > \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Funktion $F(x) = \begin{cases} e^{2x} & x < -1 \\ 1/2(1 + x/e) & -1 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-2x} & x \geq 1 \end{cases}$

1. Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.
2. Sei $\nu = \lambda_F$ das zu F gehörenden Lebesgue-Stieltjes Maß. Bestimmen Sie eine Dichte f und ein Maß μ derart, dass $\nu = f \odot \mu$ (vergleiche Satz von Radon Nikodym).
3. Sei X eine Zufallsvariable mit Bildmaß ν, also $X \sim \nu$, oder gleichbedeutend $P(X \leq x) = F(x)$. Berechnen Sie $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$

Aufgabe 4

Für zwei Dichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ ist die Kullback-Leibler-Distanz definiert als

$$D(f_X, f_Y) = \mathbb{E}\left(\log\left(\frac{f_X(X)}{f_Y(X)}\right)\right)$$

für eine Zufallsvariable X mit Dichte f_X. Sei nun f_X die Dichte der Standardnormalverteilung und f_Y die Dichte von $N(\mu, \sigma^2)$. Zeigen Sie

$$D(f_X, f_Y) = \frac{1}{2}\left(\log(\sigma^2) + \frac{1 + \mu^2}{\sigma^2} - 1\right).$$