Aufgabe 1

Es sei

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$g_n(x) = I_{[-n,n]}(x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot I_{(-\infty,-n)\cup(n,\infty)}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sei weiterhin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion und $\nu := f \odot \lambda$ das zugehörige Maß mit Dichte f.

Entscheiden Sie, ob $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \, d\nu$ und $\int \lim\limits_{n\to\infty} g_n \, d\nu$ gleich sind und bestimmen Sie diese Werte.

Aufgabe 2

Sei $\Omega = [0,1]$ und $f \in M^+$. Sei

$$X := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | x \in \Omega, 0 \leq t \leq f(x)\}$$

die Fläche unter der Funktion f. Zeigen Sie, daß X eine meßbare Menge ist und weisen Sie unter Ausnutzung des Satzes von Fubini nach, dass

$$\lambda^2(X) = \int_{[0,1]} f d\lambda.$$

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (also ein normiertes Maß mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1$) auf dem Meßraum $(\Omega, \mathcal{F})$ und $A, B \in \mathcal{F}$.

a) Falls $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}(\bar{B}) = \frac{1}{4}$, können A und B dann disjunkt sein?

b) Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bar{B}) \Rightarrow \bar{A} = B$

c) Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathbb{P}(B) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0$

d) Sei $\Omega = \{i | i \in \mathbb{N}_0\}$ mit Elementarereignissen $\omega_i = i$. Außerdem gelte $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \dfrac{c}{i!}$. Wie groß ist c?

Aufgabe 4

Überprüfen Sie, ob auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ durch die folgenden Zuordnungen ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert wird:

a) $P : A \mapsto \sum\limits_{i \in A} t(1-t)^{i-1}$ für $t \in (0,1)$

b) $P : A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } |A| < \infty \\ 1 & \text{falls } |A| = \infty \end{cases}$

c) $P : A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } |\bar{A}| = \infty \\ 1 & \text{falls } |A| = \infty \end{cases}$

d) $P : A \mapsto \sum\limits_{i \in A} \frac{1}{i}$