Die Aufgabe 4 geht nicht in die Punktewertung ein und kann daher nicht angekreuzt werden. Bitte diese Aufgabe aber trotzdem bearbeiten.

Aufgabe 1

Sei der Meßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ gegeben sowie die meßbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega \mapsto f(\omega) = \omega I_{\mathbb{N}}(\omega)$$

und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega \mapsto g(\omega) = \omega^2 I_{[0,1]}(\omega).$$

Berechnen Sie

a)

$$\int_{[0,n]} f d\lambda \text{ und } \int_{[0,n]} f d\mu_Z \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

b)

$$\int g d\lambda \text{ und } \int g d\mu_Z.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} dx$$

indem Sie den Satz von der dominierten Konvergenz ausnutzen.

Hinweis: Zeigen Sie dazu mit der Bernoulli-Ungleichung, daß $(1+nx^2)/(1+x^2)^n \leq 1$ für alle $x \in [0,1]$ ist.

Aufgabe 3

Sei λ das Lebesgue-Maß und $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \left(\frac{1+\sin x}{2}\right)^n I_{[0,2\pi]}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\lambda$.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y) = |x| \cdot \exp(-|x| - x^2y^2).$$

Bestimmen Sie das Integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2$$

unter Verwendung des Satzes von Fubini.

Hinweis: Betrachten Sie beide möglichen Integrationsreihenfolgen. Es genügt dann die Lösung für die einfachere Variante zu präsentieren. Weiterhin können Sie die Gleichheit $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ nutzen.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Maße μ_Z, $\mu_Z|_{\mathbb{N}}$, λ und $\lambda|_{[0,1]}$ folgender Mengen:

(i) $[1, 4]$, (ii) $\{1, 4\}$, (iii) $\mathbb{N}$, (iv) $\mathbb{Q}$, (v) $(-\infty, 0]$,

(vi) $A_n := [(-1)^n, 2], n \in \mathbb{N}$

Hinweis: Das reduzierte Lebesguemaß $\lambda|_A$ ist definiert als $\lambda|_A(B) = \lambda(A \cap B)$.