Die Aufgaben 1, 3 und 4 gehen nicht in die Punktewertung ein und können daher nicht angekreuzt werden. Bitte diese Aufgaben aber trotzdem bearbeiten.

Aufgabe 1

1. Sei $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, jeweils mit der Borelschen σ-Algebra.
   (a) Betrachten Sie für $\omega = 0$ das Dirac-Maß δ_0 und berechnen Sie für eine beliebige stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty[$ das Lebesgue-Integral $\int\limits_{x=-\infty}^{\infty} f(x) d\delta_0(x)$. Argumentieren Sie insbesondere mit der Konstruktion des Lebesgue-Integrals, wie die Lösung zustande kommt.
   Hinweis: Nutzen Sie die in der Vorlesung vorgestellte Konstruktion der Treppenfunktionen f_n:
   $$f_n(x) = \min \left\{ n, \ \frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n} \right\} = \sum_{j=0}^{n2^n} \frac{j}{2^n} \ I_{A_{j,n}}$$
   wobei
   $$A_{j,n} = \begin{cases} \{j2^{-n} \leq f < (j+1)2^{-n}\}, & j = 0, 1 \ldots, n2^n - 1 \\ \{f \geq n\}, & j = n2^n \end{cases} .$$
   (b) Sei nun $F(x) = \lfloor x \rfloor$, und λ_F das zugehörige Lebesgue-Stieltjes-Maß (dies ist genau das reduzierte Zählmaß $\mu_{\mathbb{Z}}$ der Aufgabe 1 des letzten Übungsblattes). Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\int\limits_{x=-\infty}^{\infty} f(x) d\lambda_F(x)$ für die Funktion
   $$f(x) = \begin{cases} p^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{wobei} \quad 0 < p < 1 \, .$$

Aufgabe 2

(a) Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:
$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{4} x, & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{für } x > 4. \end{cases}$$
Berechnen Sie das Lebesgue-Stieltjes-Maß λ_G für die Mengen
$$C = (1, 2],$$
$$D = (-2, 2].$$

(b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$F(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x < -2 \\ x & \text{für } -2 \leq x < 0 \\ x+1 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{für } 1 \leq x \end{cases}$$

Sei λ_F das zu F gehörende Lebesgue-Stieltjes-Maß.

(i) Bestimmen Sie $\lambda_F((-\infty, a])$ für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\lambda_F(\{0\}) = 1$ und $\lambda_F(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

Aufgabe 3

Sei λ wieder das Lebesgue-Maß und $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_n(x) := (n+1)x^n I_{[0,1)}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie $\int \lim\limits_{n\to\infty} g_n \, d\lambda$.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda$.

c) Warum ist hier der Satz von der monotonen Konvergenz nicht anwendbar?

Hinweis: $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)x^n = 0$ für alle $x \in [0, 1)$.

Aufgabe 4

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ der Maßraum mit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ und für μ gelte

$$\mu(\{1\}) = 1, \quad \mu(\{2, 3\}) = 2 \quad \text{und} \quad \mu(\Omega) = 7.$$

Überlegen Sie, welche der folgenden Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bezüglich μ integrierbar sind, und geben Sie gegebenenfalls $\int_\Omega f d\mu$ an.

a) $f(\omega) = \omega$

b) $f(\omega) = I_{\{4,5,6\}}(\omega)$

c) $f(\omega) = \max\{\omega, 4\}$

d) $f(\omega) = -7\omega^5 + 125\omega^4 - 835\omega^3 + 2575\omega^2 - 3658\omega + 2040$

Aufgabe 5

Es sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f_n(x) = x^2 \cdot I_{[-n,n]}(x) + n^2 \cdot I_{(-\infty,-n)\cup(n,\infty)}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entscheiden Sie, ob $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int f_n \, d\lambda$ und $\displaystyle\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\lambda$ gleich sind und bestimmen Sie diese Werte.