Die Aufgaben 1 und 2 gehen nicht in die Punktewertung ein und können daher nicht angekreuzt werden. Bitte diese Aufgaben aber trotzdem bearbeiten.

Aufgabe 1

Sei $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Maß und $A \in \mathcal{F}$ eine Menge.

1. Zeigen Sie, dass das durch den Schnitt mit A induzierte Maß
$$\mu_A : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} : M \mapsto \mu(M \cap A)$$
in der Tat ein (wohldefiniertes) Maß auf $\mathcal{F}$ ist.

2. Sei nun μ das Zählmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und A die Menge der ganzen Zahlen. Wie lautet die (bis auf eine Konstante c) eindeutig bestimmte Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit
$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \mu_A(]a, b]) = F(b) - F(a)$$

3. Wie lautet die Funktion F, wenn für μ das Dirac-Maß δ_ω auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und für A der gesamte Raum $\mathbb{R}$ betrachtet wird?

Aufgabe 2

Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ein translationsinvariantes Maß. Zeigen Sie, dass für beliebige Intervalle $]a, b]$ notwendigerweise gelten muss:
$$\mu(]a, b]) = \mu(]0, 1]) \cdot (b - a).$$
Hinweis: Betrachten Sie erst Intervalle der Form $]0, \frac{1}{n}]$, dann Intervalle mit rationalen Endpunkten und zum Schluss beliebige Intervalle.

Aufgabe 3

Sei $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jeweils mit σ-Algebra $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{E})$, wobei
$$\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} .$$
Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \max(1, x - 1)$.

1. Geben Sie explizit die beiden Mengensysteme $f^{-1}(\mathcal{F}_2)$ und $\{B | f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1\}$ an und zeigen Sie, dass es sich dabei jeweils um σ-Algebren handelt.
2. Ist f $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ messbar?
3. Zeigen Sie, dass $f(\mathcal{F}_1)$ keine σ-Algebra ist. (Welche beiden Eigenschaften sind nicht erfüllt?)

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $\mathcal{E} := \{\ ]-\infty, c[\ \mid\ c \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeugendensystem der Borelmengen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist.
Hinweis: es reicht, zu zeigen, dass man mit $\mathcal{E}$ alle offenen Intervalle $]a, b[$ erzeugen kann.

Aufgabe 5

Das Mengensystem $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \,|\, A \text{ ist abzählbar oder } \bar{A} \text{ ist abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$.
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar sind.

a) $f(x) = x$.

b) $f(x) = \lfloor x \rfloor,\ x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = I_{\mathbb{Q}}(x),\ x \in \mathbb{R}$.