

Nachklausur

Statistik III

Sommersemester 2009

Prof. Dr. Torsten Hothorn
Institut für Statistik

Name: Name, Vorname

Matrikelnummer: 0123456

Wichtig:

- Überprüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben (auf jeweils zwei Seiten, Aufgabe 1 auf drei Seiten) und einem Deckblatt. Kontrollieren Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich den Klausurbogen (Vorder- und Rückseite), Zusatzblätter werden auf Anfrage ausgeteilt.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind alle Mitschriften der Vorlesung und der Übung, das ausgedruckte Skript sowie Bücher und ein Taschenrechner.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Ich bin damit einverstanden, daß das Klausurergebnis unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Seite

<http://www.stat.uni-muenchen.de/~hothorn>

veröffentlicht wird. (Bei Nichtzutreffen bitten streichen.)

Viel Erfolg!

Punkte:

Note:

Aufgabe 1

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch (mit kurzer Begründung)?

- a) Es seien A, B und C Ereignisse einer Grundmenge Ω und es gelte

$$\overline{(C \cup A)} \cup \overline{(C \cup \bar{A})} = B.$$

Dann gilt $C = \bar{B}$. (**2 Pkt.**)

Lösung: richtig. Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{(C \cup A)} \cup \overline{(C \cup \bar{A})} &\stackrel{\text{deMorgan}}{=} (\bar{C} \cap \bar{A}) \cup (\bar{C} \cap A) \\ &\stackrel{\text{Distributivgesetz}}{=} \bar{C} \cap \underbrace{(\bar{A} \cup A)}_{=\Omega} \\ &= \bar{C} \stackrel{\text{Aufgabenstellung}}{=} B \Leftrightarrow C = \bar{B}. \end{aligned}$$

- b) Jedes abzählbar unendliche Mengensystem kann in abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Mengen zerlegt werden. (**1 Pkt.**)

Lösung: richtig. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, mit $B_1 := A_1$ und $B_i := A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$, $i = 2, 3, \dots$ (vgl. Blatt 3, Aufgabe 1).

- c) Auf einem Maßraum (Ω, \mathcal{F}) sei die reelle Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar. Dann ist auch die Funktion $\omega \mapsto e^{f(\omega)}$ meßbar. (**1 Pkt.**)

Lösung: richtig. Die Funktion $e^{f(\omega)}$ ist stetig und damit nach Satz 2.16 und Beispiel 2.6 meßbar.

- d) Auf dem Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ sei die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\omega \mapsto f(\omega) = \omega^3 I_{[-1,1]}(\omega)$$

gegeben. Dann gilt

$$\int f d\mu_Z = 0.$$

(**2 Pkt.**)

Lösung: falsch. Da f kein endliches Bild hat erfolgt eine Approximation durch Treppenfunktionen $f_n \uparrow f$, z.B. $f_n = \frac{\lfloor 2^n f(\omega) \rfloor}{2^n}$. Unter Verwendung von Partitionen $A_i, i = 1, \dots, n$ von $[-1, 1]$ erhält man

$$\begin{aligned} \int f d\mu_Z &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu_Z \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{i=1}^n \sum_{\omega \in A_i} \frac{\lfloor 2^n f(\omega) \rfloor}{2^n} I_{A_i}(\omega) d\mu_Z \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{\omega \in A_i} \frac{\lfloor 2^n f(\omega) \rfloor}{2^n} \underbrace{\mu_Z(A_i)}_{=\infty \text{ für } A_i \in [-1,1]} = \infty, \end{aligned}$$

wobei sich (1) aus Definition 3.2 ergibt.

- e) Bei der Bundestagswahl am 18.9.2005 haben 34 Prozent der Erstwähler ihre Stimme für die SPD abgegeben. Aufgrund der langjährigen Erfahrung (Wahlanalysen) weiß man, dass 35 Prozent derjenigen Wähler, die sich bei der Bundestagswahl für

die SPD entscheiden, bei der darauffolgenden Bundestagswahl entweder eine andere Partei wählen oder zu den Nichtwählern gehören. Außerdem ist bekannt, daß 30 Prozent der Wahlberechtigten, die bei einer Bundestagswahl nicht SPD wählen, bei der darauffolgenden Bundestagswahl für die Sozialdemokraten stimmen werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig bestimmter Wahlberechtigter bei seiner zweiten Bundestagswahl SPD wählt beträgt 0.317. (**2 Pkt.**)

Lösung: falsch. Sei A das Ereignis ‘SPD bei 1. Wahl gewählt’ und B das Ereignis ‘SPD bei 2. Wahl gewählt’. Dann erhalten wir $\mathbb{P}(A) = 0.34 \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}) = 0.66$, $\mathbb{P}(\bar{B}|A) = 0.35 \Rightarrow \mathbb{P}(B|A) = 0.65$ sowie $\mathbb{P}(B|\bar{A}) = 0.3$. Gesucht ist $\mathbb{P}(B)$. Nach Satz 6.4. gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}) \\ &= 0.65 \cdot 0.34 + 0.3 \cdot 0.66 \\ &= 0.419 \neq 0.317.\end{aligned}$$

- f) Es seien X, Y, Z quadratisch integrierbare Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(Y, Z)$. (**2 Pkt.**)

Lösung: richtig. Es gilt

$$\begin{aligned}\text{Cov}(aX + bY, Z) &\stackrel{\text{Satz 7.18(i)}}{=} \mathbb{E}((aX + bY)Z) - \mathbb{E}(aX + bY)\mathbb{E}(Z) \\ &\stackrel{\text{Satz 3.8(i)}}{=} a\mathbb{E}(XZ) + b\mathbb{E}(YZ) - (a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y))\mathbb{E}(Z) \\ &= a(\mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z)) + b(\mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)) \\ &= a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(Y, Z).\end{aligned}$$

- g) Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega = [0, 1], \mathcal{F}, \mathbb{P})$ werden die stetigen, standardgleichverteilten Zufallsvariablen $X_n(\omega) = \omega + \omega^n$ und $X(\omega) = \omega$ betrachtet. Es gilt

$$X_n \xrightarrow{f.s.} X.$$

(**1 Pkt.**)

Lösung: richtig. Nach Definition 9.1 (a) muss gelten

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \text{ für } n \rightarrow \infty\}) = 1$$

für alle Teilmengen $A \subset \Omega$ außer Nullmengen (vgl. Bemerkung a) zu Def. 9.1).

Für $\omega \in [0, 1)$ gilt $\omega^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und damit $X_n(\omega) \rightarrow \omega + 0 = X(\omega)$. Für $\omega = 1$ gilt $\omega^n = 1 \forall n$ und damit $X_n(\omega) = 2 \neq 1 = X(1)$. Wegen $\mathbb{P}(\{1\}) = 0$ (bei nichtentarteter Verteilung) handelt es sich dabei jedoch um eine Nullmenge. Daher sind die Voraussetzungen der fast sicheren Konvergenz erfüllt.

Aufgabe 2

Die momentenerzeugende Funktion einer reellen Zufallsvariable X laute $M_X(s)$ für $s \in \mathcal{D}$. Sei $\Psi(s) := \log M_X(s)$. Zeigen Sie, daß

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi(s)}{\partial s^2} \right|_{s=0} = \mathbb{V}(X).$$

(Hinweis: $\frac{\partial \log f(x)}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} / f(x)$.) (6 Pkt.)

Lösung

Für die 1. und 2. Ableitung erhalten wir

$$\frac{\partial \Psi(s)}{\partial s} = \frac{\partial \log M_X(s)}{\partial s} \stackrel{\text{Hinweis}}{=} \frac{M'_X(s)}{M_X(s)}$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 \Psi(s)}{\partial s^2} \stackrel{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{M''_X(s)M_X(s) - (M'_X(s))^2}{(M_X(s))^2}.$$

An der Stelle $s = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Psi(s)}{\partial s^2} \right|_{s=0} &= \frac{M''_X(0)M_X(0) - (M'_X(0))^2}{(M_X(0))^2} \\ &\stackrel{(1)}{=} E(X^2) - E(X)^2 \\ &\stackrel{\text{Def. 5.5}}{=} \mathbb{V}(X), \end{aligned}$$

wobei in (1) die Aussagen $M_X(0) = E(X^0) = 1$, $M'_X(0) = E(X)$, $M''_X(0) = E(X^2)$ (vgl. Satz 5.11 (iii)) verwendet wurden.

Aufgabe 3

Es seien $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ und es sei $X = (X_1, X_2)$ ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit der Dichte

$$f(x_1, x_2) = \lambda_1 \lambda_2 \exp\{-(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\} I_{(0, \infty)}(x_1) I_{(0, \infty)}(x_2).$$

- Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und die Randdichten von X . (**5 Pkt.**)
- Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig? (**1 Pkt.**)
- Für $i = 1, 2$ sei $Y_i = \exp\{-\lambda_i X_i\}$. Bestimmen Sie die Dichte des Zufallsvektors $Y = (Y_1, Y_2)$. (**6 Pkt.**)

Lösung

(a)

Für die Verteilungsfunktion erhält man

$$\begin{aligned} F_X(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) &= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \exp\{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2\} dt_1 dt_2 \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^{x_1} \exp\{-\lambda_1 t_1\} \underbrace{\left[\int_0^{x_2} \exp\{-\lambda_2 t_2\} dt_2 \right]}_{\left[-\frac{1}{\lambda_2} \exp\{-\lambda_2 t_2\} \right]_0^{x_2} = -\frac{1}{\lambda_2} (\exp\{-\lambda_2 x_2\} - 1)} dt_1 \\ &= \lambda_1 (1 - \exp\{-\lambda_2 x_2\}) \underbrace{\int_0^{x_1} \exp\{-\lambda_1 t_1\} dt_1}_{\left[-\frac{1}{\lambda_1} \exp\{-\lambda_1 t_1\} \right]_0^{x_1} = -\frac{1}{\lambda_1} (\exp\{-\lambda_1 x_1\} - 1)} \\ &= (1 - \exp\{-\lambda_1 x_1\})(1 - \exp\{-\lambda_2 x_2\}). \end{aligned}$$

Die Randdichten sind aufgrund der Symmetrie identisch. Man erhält

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty \exp\{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2\} dx_2 \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \exp\{-\lambda_1 x_1\} \underbrace{\int_0^\infty \exp\{-\lambda_2 x_2\} dx_2}_{-\frac{1}{\lambda_2} [\exp\{-\lambda_2 x_2\}]_0^\infty = 1/\lambda_2} \\ &= \lambda_1 \exp\{-\lambda_1 x_1\}, \end{aligned}$$

d.h. $x_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$.

(b)

Da $f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$ sind nach Satz 7.10 X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen.

(c)

Betrachtet wird die gemeinsame Verteilung der Transformation

$$g(X_1, X_2) = (e^{-\lambda_1 X_1}, e^{-\lambda_2 X_2}) = (Y_1, Y_2).$$

Für $i = 1, 2$ erhält man

$$Y_i = e^{-\lambda_i X_i} \Leftrightarrow \log Y_i = -\lambda_i X_i \Leftrightarrow X_i = -\frac{1}{\lambda_i} \log Y_i, \quad Y_i \in (0, 1)$$

und damit

$$h(Y_1, Y_2) = g^{-1}(X_1, X_2) = \left(-\frac{1}{\lambda_1} \log Y_1, -\frac{1}{\lambda_2} \log Y_2 \right).$$

Die Jacobi-Matrix von h lautet

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial Y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial Y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1 Y_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda_2 Y_2} \end{bmatrix}$$

und damit $\det H = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{Y_1 Y_2}$.

Anwendung des Dichtetransformationssatzes (Satz 7.7) ergibt

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= f_{X_1, X_2}(h(y_1, y_2)) |\det H| I_{(0, \infty)} \left(-\frac{1}{\lambda_1} \log y_1 \right) I_{(0, \infty)} \left(-\frac{1}{\lambda_2} \log y_2 \right) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \exp \left\{ -\lambda_1 \left(-\frac{1}{\lambda_1} \log y_1 \right) - \lambda_2 \left(-\frac{1}{\lambda_2} \log y_2 \right) \right\} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{y_1 y_2} I_{(0, 1)}(y_1) I_{(0, 1)}(y_2) \\ &= 1 \cdot I_{(0, 1)}(y_1) I_{(0, 1)}(y_2). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Laut Brockhaus sind 4% der männlichen Bundesbürger Linkshänder. Geben Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow eine Abschätzung nach unten für die Wahrscheinlichkeit an, daß unter 800 Studenten zwischen 24 und 40 (d.h. mehr als 24 und weniger als 40) Linkshänder sind. (**6 Pkt.**)

Lösung

Sei X die Anzahl der Linkshänder unter 800 Studenten. Unter der Annahme der Unabhängigkeit und identischen Verteilung des dichotomen Merkmals ‘Linkshänder’ ist X binomialverteilt zu den Parametern $n = 800$ und $p = 0.04$. Nach Beispiel 5.3 ergibt sich

$$\mathbb{E}(X) = np = 32, \quad \mathbb{V}(X) = np(1 - p) = 30.72.$$

Die Tschebyschow-Ungleichung (Satz 7.14) lautet

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}.$$

In unserem Fall ist folgende Abschätzung gesucht:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < 8) &= 1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 8) \\ &\stackrel{\text{Satz 7.14}}{\geq} 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{64} \\ &= 1 - 30.72/64 = 0.52. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit daß sich unter 800 Studenten zwischen 24 und 40 Linkshänder befinden, beträgt mindestens 0.52.

Aufgabe 5

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum mit den Ereignissen $A \subset B \subset \mathcal{F}$ und $\mathbb{P}(A) = 0.4, \mathbb{P}(B) = 0.5$. Sei $\mathcal{E} = \{A, B\}$.

- Bestimmen Sie die durch \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra $\sigma(\mathcal{E})$. (2 Pkt.)
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse von $\sigma(\mathcal{E})$. (3 Pkt.)

Lösung

(a) Ansatz für die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra:

$$\sigma(\{A, B\}) = \{\emptyset, A, B, \bar{A}, \bar{B}, \underbrace{A \cup B}_{=B}, A \cup \bar{B}, \underbrace{\bar{A} \cup B}_{=\bar{A}}, \underbrace{\bar{A} \cup \bar{B}}_{=\bar{A}}, \Omega\}.$$

Damit ergibt sich vereinfacht

$$\sigma(\{A, B\}) = \{\emptyset, A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cup \bar{B}, \Omega\}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\emptyset) &= 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1, \\ \mathbb{P}(A) &= 0.4 \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}) = 0.6, \mathbb{P}(B) = 0.5 \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{B}) = 0.5 \\ \mathbb{P}(A \cup \bar{B}) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{B}) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cap \bar{B})}_{=0} = 0.9 \end{aligned}$$

