

Klausur
Statistik III
Wintersemester 2007/2008

Prof. Dr. Torsten Hothorn
Institut für Statistik

Name: Name, Vorname

Matrikelnummer: 0123456

Wichtig:

- Überprüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben (jeweils zwei Seiten), einem Deckblatt und der Standardnormalverteilung im Anhang. Kontrollieren Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich den Klausurbogen (Vorder- und Rückseite), Zusatzblätter werden auf Anfrage ausgeteilt.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind alle Mitschriften der Vorlesung und der Übung, das ausgedruckte Skript sowie Bücher und ein Taschenrechner.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

☐ Ich bin damit einverstanden, daß das Klausurergebnis unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Seite

<http://www.stat.uni-muenchen.de/~hothorn>

veröffentlicht wird.

Viel Erfolg!

Punkte:

Note:

Aufgabe 1

Seien A, B Element einer σ -Algebra \mathcal{F} . Zeigen Sie, daß \mathcal{F} ebenfalls die folgenden Mengen enthält:

a) $A \setminus B$ (**3 Pkt.**)

$$A \setminus B = A \cap \underbrace{\bar{B}}_{\substack{\in \mathcal{F}(S2) \\ \text{endlicher Schnitt, vgl. Blatt 2, A3}}} \Rightarrow \in \mathcal{F}$$

b) $A \triangle B$ (**3 Pkt.**)

$$A \triangle B = \underbrace{(A \setminus B)}_{\in \mathcal{F}} \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{F} \text{ nach a)}} \Rightarrow \in \mathcal{F}$$

(S3) endliche Vereinigung

Aufgabe 2

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Erwartungswert μ . Zeigen Sie, daß

$$\mu = \operatorname{argmin}_{b \in \mathbb{R}} \mathbb{E}((X - b)^2).$$

Hinweis: Fassen Sie obigen Ausdruck als Funktion von b auf und bestimmen Sie das Minimum analytisch. (6 Pkt.)

$$\begin{aligned} g(b) &= \mathbb{E}((X - b)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2b\mathbb{E}(X) + b^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2b\mu + b^2 \\ \frac{\partial g(b)}{\partial b} &= -2\mu + 2b \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow b = \mu \end{aligned}$$

und wegen

$$\frac{\partial^2 g(b)}{\partial^2 b} = 2 > 0$$

ist dies tatsächlich ein Minimum.

Aufgabe 3

Frau Meier und Herr Müller sind die beiden einzigen Kandidaten für die Oberbürgermeisterwahl einer mittelgroßen deutschen Stadt mit 500000 Einwohnern. Frau Meier hat 2000 Stammwähler, die sie mit Sicherheit wählen. Alle anderen Wähler wählen Frau Meier bzw. Herrn Müller mit Wahrscheinlichkeit $1/2$. Wie groß ist in etwa die Wahrscheinlichkeit, daß Frau Meier Oberbürgermeisterin wird?

Hinweis: Nehmen Sie an, daß die Stimmabgabe der Wähler stochastisch unabhängig erfolgt und alle Wähler auch zur Wahl gehen. (**6 Pkt.**)

Damit Herr Müller gewinnt, braucht er 250001 Stimmen, die er von $500000 - 2000 = 498000 =: n$ Wählern potentiell erhalten kann (da 2000 Wähler sicher Frau Meier wählen). Für die Summe der Stimmen X , die Herr Müller auf sich vereinigen kann, gilt also $X \sim B(n, p := 0.5)$. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Frau Meier gewinnt}) &= \mathbb{P}(X < 250000) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{250000 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < 2.834\right) \\ &\stackrel{\text{ZGWS}}{\approx} \Phi(2.834) = 0.998\end{aligned}$$

Frau Meier gewinnt also die Wahl mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit!

Aufgabe 4

Beantworten Sie die folgenden Fragen jeweils mit kurzer Begründung!

- a) Was ist eine Wahrscheinlichkeit (im Sinne dieser Vorlesung)? (**1 Pkt.**)
 $\mathbb{P}(A)$ wobei A Element einer σ -Algebra \mathcal{F} und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
- b) Sei X Zufallsvariable mit Dichte $f_X(3-x) = f_X(3+x)$. Wie groß ist $\mathbb{E}(X)$? (**1 Pkt.**)
 3 (Symmetrie)
- c) Wie lautet die Dichte einer $N(2.5, 9)$ -Verteilung? (**1 Pkt.**)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-2.5)^2}{9}\right)$$

- d) Sei $\Omega = \{+, -, \times, \otimes\}$ und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Unter welcher Bedingung ist X eine Zufallsvariable? (**1 Pkt.**)
 $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{P}(\Omega)$
- e) Es seien X und Y Zufallsvariablen. Wie groß ist die Korrelation von X und $Y = 2X + 3$? (**1 Pkt.**)
 1 (lineare Transformation)
- f) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{D} N(0, 1)$. Gegen welche Verteilung konvergiert $2X_n$? (**1 Pkt.**)
 $N(0, 4)$ (Satz 10.11)
- g) Wie lautet die Dichte einer exponentialverteilten Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}(X) = \exp(1)$? (**1 Pkt.**)
 $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) I_{[0, \infty)}(x)$, $\lambda = \exp(1)^{-1}$ denn $\mathbb{E}(X) = \lambda^{-1}$.
- h) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Folge von Zufallsvariablen, welche fast sicher gegen 1 konvergiert. Wie groß ist $\mathbb{P}(X_n \leq 1 + \varepsilon)$ für $n \rightarrow \infty$ und alle $\varepsilon > 0$? (**2 Pkt.**)
 $\mathbb{P}(X_n \leq 1 + \varepsilon) \rightarrow 1$, denn aus $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 1$ folgt $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 \iff \mathbb{P}(|X_n - 1| \leq \varepsilon) \rightarrow 1$ und wegen der Positivität gilt

$$\begin{aligned} 1 \leftarrow \mathbb{P}(|X_n - 1| \leq \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n - 1 \leq \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(X_n \leq 1 + \varepsilon) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

- i) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3 & x \in [0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1] \\ 13 & x \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\} \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Wie groß ist

$$\int f d\lambda + \int_{\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}} f d\mu?$$

(λ bezeichnet das Lebesguemaß und μ_Z das Zählmaß) (**2 Pkt.**)

$3\lambda([0, 1]) + 13\mu(\{4^{-1}, 3^{-1}, 2^{-1}\}) = 3 + 13 \cdot 3 = 42$ (die Unstetigkeitsstellen von f auf $[0, 1]$ sind eine Nullmenge!)

Aufgabe 5

Die Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 seien alle standardnormalverteilt und stochastisch unabhängig. Betrachten Sie die Zufallsvariablen

$$Y_1 = X_1, Y_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}, Y_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

- a) Welcher Verteilung folgt $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$? (**3 Pkt.**)

$X = (X_1, X_2, X_3)$ und $Y = AX$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

und somit $Y = AX \sim N(0, AA^\top)$ (Def. 9.24) mit

$$AA^\top = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Siehe auch Übungsblatt 12, Aufgabe 4.

- b) Sind Y_1, Y_2, Y_3 stochastisch unabhängig? (**1 Pkt.**)
nein, siehe Korrelationen.
- c) Wie groß ist die Korrelation zwischen Y_2 und Y_3 ? (**1 Pkt.**)

$$\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{3}}} = 0.816$$

- d) Wie groß ist die Varianz von Y_3 ? (**1 Pkt.**)
 $\frac{1}{3}$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.05	0.5199	1.05	0.8531	2.05	0.9798
0.10	0.5398	1.10	0.8643	2.10	0.9821
0.15	0.5596	1.15	0.8749	2.15	0.9842
0.20	0.5793	1.20	0.8849	2.20	0.9861
0.25	0.5987	1.25	0.8944	2.25	0.9878
0.30	0.6179	1.30	0.9032	2.30	0.9893
0.35	0.6368	1.35	0.9115	2.35	0.9906
0.40	0.6554	1.40	0.9192	2.40	0.9918
0.45	0.6736	1.45	0.9265	2.45	0.9929
0.50	0.6915	1.50	0.9332	2.50	0.9938
0.55	0.7088	1.55	0.9394	2.55	0.9946
0.60	0.7257	1.60	0.9452	2.60	0.9953
0.65	0.7422	1.65	0.9505	2.65	0.9960
0.70	0.7580	1.70	0.9554	2.70	0.9965
0.75	0.7734	1.75	0.9599	2.75	0.9970
0.80	0.7881	1.80	0.9641	2.80	0.9974
0.85	0.8023	1.85	0.9678	2.85	0.9978
0.90	0.8159	1.90	0.9713	2.90	0.9981
0.95	0.8289	1.95	0.9744	2.95	0.9984
1.00	0.8413	2.00	0.9772	3.00	0.9987

Tabelle 1: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.