

Klausur
Statistik III
Wintersemester 2009/2010

Prof. Dr. Torsten Hothorn
Institut für Statistik

Name: Name, Vorname

Matrikelnummer: 0123456

Wichtig:

- Überprüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben, einem Deckblatt und der Standardnormalverteilung im Anhang. Kontrollieren Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich den Klausurbogen (Vorder- und Rückseite), Zusatzblätter werden auf Anfrage ausgeteilt.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind alle Mitschriften der Vorlesung und der Übung, das ausgedruckte Skript sowie Bücher und ein Taschenrechner.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Ich bin damit einverstanden, daß das Klausurergebnis unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Seite

<http://www.stat.uni-muenchen.de/~hothorn>

veröffentlicht wird. (Bei Nichtzutreffen bitten streichen.)

Aus 0% bearbeiteten Übungsaufgaben haben Sie bereits **0** Bonuspunkte erworben. ✓

Viel Erfolg!

Punkte:

Note:

Aufgabe 1

Seien $X \sim B(n, p)$ und $Y \sim B(m, p)$ zwei unabhängige Zufallsvariablen. Bestimmen Sie anhand der momenterzeugenden Funktion die Verteilung von $Z = X + Y$. (6 Pkt.)

Hinweise:

$$\exp(sx) = \exp(s)^x$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Lösung:

$$\begin{aligned} M_X(s) &= \mathbb{E}(e^{sX}) \\ &= \sum_{x=0}^n \left[e^{sx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \right] \\ &= \sum_{x=0}^n \left[\binom{n}{x} (e^s p)^x (1-p)^{n-x} \right] \\ &= (e^s p + 1 - p)^n \end{aligned}$$

$$M_Y(s) = (e^s p + 1 - p)^m$$

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(s) &= M_X(s) \cdot M_Y(s) = (e^s p + 1 - p)^n \cdot (e^s p + 1 - p)^m \\ &= (e^s p + 1 - p)^{n+m} \end{aligned}$$

$$Z = X + Y \sim B(n + m, p)$$

Aufgabe 2

Die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) sei stetig verteilt mit Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + cy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $c = \frac{4}{3}$. (**2 Pkt.**)
- (b) Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y . (**2 Pkt.**)
- (c) Überprüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind. (**2 Pkt.**)
- (d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$. (**2 Pkt.**)
- (e) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(\exp(Y))$. (**2 Pkt.**)
- (f) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X \leq Y)$. (**2 Pkt.**)

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f_{X,Y}(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x + cy \right) dx dy = \int_0^1 \left[\frac{2}{6}x^2 + cxy \right]_0^1 dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + cy \right) dy = \left[\frac{1}{3}y + \frac{c}{2}y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{c}{2} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{2} = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y \right) dy = \left[\frac{2}{3}xy + \frac{4}{6}y^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \quad \text{für } x \in [0, 1] \\ f_Y(y) &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y \right) dx = \left[\frac{2}{6}x^2 + \frac{4}{3}yx \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}y \quad \text{für } y \in [0, 1] \end{aligned}$$

(c) Wähle z.B. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}$.

$$f_X\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f_Y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{56}{81} \neq f_{X,Y}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{9}$$

\Rightarrow X und Y sind nicht unabhängig.

(d)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{6}x^2 \right]_0^1 = \frac{2}{9} + \frac{2}{6} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(Y)) &= \int_0^1 \exp(y) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}y\right) dy \\&= \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 \exp(y) dy + \frac{4}{3} \cdot \int_0^1 y \cdot \exp(y) dy \\&= \left[\frac{\exp(y)}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{4}{3}y \exp(y)\right]_0^1 - \frac{4}{3} \cdot \int_0^1 \exp(y) dy \\&= \frac{e-1}{3} + \frac{4e}{3} - \frac{4}{3}(e-1) \\&= \frac{e}{3} + 1\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq Y) &= \int_0^1 \int_0^y \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y dx dy \\&= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}yx\right]_0^y dy \\&= \int_0^1 \frac{y^2}{3} + \frac{4y^2}{3} dy \\&= \int_0^1 \frac{5}{3}y^2 dy = \left[\frac{5}{3} \cdot \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{9}\end{aligned}$$

Alternativ:

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \int_0^1 \int_x^1 \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y dy dx = \dots = \frac{5}{9}$$

Aufgabe 3

- (a) Berechnen Sie die Maße μ_Z , $\mu_Z|_{\mathbb{Z}}$, λ und $\lambda|_{[1,4]}$ für die Menge

$$A = (-2, 1].$$

(4 Pkt.)

- (b) Berechnen Sie die Maße μ_Z , $\mu_Z|_{\mathbb{Z}}$ und $\lambda|_{[1,4]}$ für die Menge

$$B = \{-2, 2.5, 3\}.$$

(3 Pkt.)

- (c) Betrachten Sie die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{4}x, & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{für } x > 4. \end{cases}$$

Berechnen Sie das Lebesgue-Stieltjes-Maß λ_F für die Mengen

$$C = (1, 2],$$

$$D = (-2, 2].$$

(2 Pkt.)

Hinweis (für die Teilaufgaben (a) und (b)):

Das reduzierte Lebesguemaß $\lambda|_A$ ist definiert als $\lambda|_A(B) = \lambda(A \cap B)$.

Lösung

(a) $\mu_Z(A) = \infty$

$$\mu_Z|_{\mathbb{Z}}(A) = 3$$

$$\lambda(A) = 3$$

$$\lambda|_{[1,4]}(A) = 0$$

(b) $\mu_Z(B) = 3$

$$\mu_Z|_{\mathbb{Z}}(B) = 2$$

$$\lambda|_{[1,4]}(B) = 0$$

(c) $\lambda_F(C) = F(2) - F(1) = \frac{1}{4} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

$$\lambda_F(D) = F(2) - F(-2) = \frac{1}{4} \cdot 2 - 0 = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4

Sind die folgenden Aussagen **richtig oder falsch** (mit kurzer Begründung)?

- (a) Sei $\Omega = \{a, b, c\}$ und $\mathcal{F} = \sigma(\{a\})$ und $\mathcal{G} = \sigma(\{b\})$ σ -Algebren über Ω .
Dann ist $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ ist eine σ -Algebra. (**1 Pkt.**)

Falsch. $\{a, b\} \notin \mathcal{H}$ und somit ist (S3) verletzt.

- (b) Seien A, B und Ω endlich und die Elementarereignisse diskret gleichverteilt auf Ω .
Sind die Ereignisse A und B unabhängig, so gilt $\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$. (**2 Pkt.**)

Richtig. $\frac{|A \cap B|}{|B|} = \mathbb{P}(A|B) \stackrel{\text{Unabh.}}{=} \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

- (c) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda(x-1)) & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

ist die Dichte einer Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. (**2 Pkt.**)

Richtig.

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x+1) dx = \int_0^{\infty} g(x) dx = 1$$

mit g Dichte der Exponentialverteilung

- (d) Das Mengensystem $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ ist abzählbar oder } \bar{A} \text{ ist abzählbar}\}$ ist eine σ -Algebra über \mathbb{R} (vgl. Skript Beispiel 2.2).

Die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -messbar.

- (i) $f(x) = x$. (**1 Pkt.**)

Falsch. $(0, 1] \in \mathcal{B}$, aber $f^{-1}((0, 1]) = (0, 1] \notin \mathcal{A}$

- (ii) $f(x) = \lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}$. (**1 Pkt.**)

Falsch. $\{0\} \in \mathcal{B}$, aber $f^{-1}(\{0\}) = [0, 1] \notin \mathcal{A}$

- (iii) $f(x) = I_{\mathbb{Q}}(x), x \in \mathbb{R}$. (**1 Pkt.**)

Richtig.

$$\text{Für } B \in \mathcal{B} \text{ ist } f^{-1}(B) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } \{0, 1\} \subset B \\ \mathbb{Q} & \text{falls } 1 \in B \text{ aber } 0 \notin B \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & \text{falls } 0 \in B \text{ aber } 1 \notin B \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

- (e) Sei (Ω, \mathcal{F}) ein Messraum. Bei der folgenden Abbildung $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ handelt es sich um ein Maß. (**1 Pkt.**)

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \alpha, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \alpha > 0 \text{ fest.}$$

Falsch.

Seien A, B disjunkt und $\neq \emptyset$, $A \dot{\cup} B = C$.

$$\mu(A) = \mu(B) = \mu(C) = \alpha.$$

$$\mu(C) = \mu(A \dot{\cup} B) = \alpha \neq 2\alpha = \mu(A) + \mu(B) \Rightarrow \text{(M3) verletzt.}$$

- (f) Unter N Losen sind n Gewinne. Zwei Personen ziehen nacheinander ein Los und behalten dieses. Beide haben die gleiche Wahrscheinlichkeit einen Gewinn gezogen zu haben. (**2 Pkt.**)

Richtig.

A : Person 1 hat Gewinn.

B : Person 2 hat Gewinn.

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = \frac{n-1}{N-1} \cdot \frac{n}{N} + \frac{n}{N-1} \cdot \frac{N-n}{N} = \frac{n}{N} = P(A)$$

- (g) Sei λ das Lebesgue-Maß und

$$f_n(x) := n I_{[0, \frac{1}{n})}(x), \quad n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1].$$

Mit dem Satz der dominierten Konvergenz lässt sich für f_n zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda.$$

(**1 Pkt.**)

Falsch. Der Satz der dominierten Konvergenz lässt sich nicht anwenden, da keine Folge $g_n \rightarrow g$ (punktweise) existiert mit $|f_n| \leq g_n$.

Aufgabe 5

Seien X_1, \dots, X_n u.i.v. mit $X_i \sim \text{LogN}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 < \infty$.

Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{n} \left(\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{\frac{1}{n}} - \exp(\mu) \right) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 \exp(\mu)^2).$$

Zeigen Sie zunächst, dass $\log(X_i) \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Hinweis:

Die Dichte von X_i , $i = 1, \dots, n$, lautet

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{x_i \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(\log(x_i) - \mu)^2}{\sigma^2} \right) \cdot I_{(0, \infty)}(x_i).$$

(8 Pkt.)

Lösung:

$$\begin{aligned} y = g(x) = \log(x) &\Rightarrow h(y) = \exp(y) \\ \frac{\partial h(y)}{\partial y} &= \exp(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Trafo} \quad f_Y(y) &= f_{X_i}(\exp(y)) \cdot |\exp(y)| \\ &= \frac{1}{\exp(y) \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(y - \mu)^2}{\sigma^2} \right) \cdot |\exp(y)| \cdot \underbrace{I_{(0, \infty)}(\exp(y))}_{\text{immer}=1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(y - \mu)^2}{\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y = \log(X_i) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\log(X_i)) = \mu, \quad \mathbb{V}(\log(X_i)) = \sigma^2$$

$$\stackrel{\text{ZGWS}}{\Rightarrow} \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(X_i) - \mu \right) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$$

$$\stackrel{\Delta\text{-Methode, } f=\exp}{\Rightarrow} \sqrt{n} \left(\exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(X_i) \right) - \exp(\mu) \right) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 \exp(\mu)^2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \left(\exp \left(\sum_{i=1}^n \log(X_i) \right)^{\frac{1}{n}} - \exp(\mu) \right)$$

$$= \sqrt{n} \left(\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{\frac{1}{n}} - \exp(\mu) \right) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 \exp(\mu)^2)$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.05	0.5199	1.05	0.8531	2.05	0.9798
0.10	0.5398	1.10	0.8643	2.10	0.9821
0.15	0.5596	1.15	0.8749	2.15	0.9842
0.20	0.5793	1.20	0.8849	2.20	0.9861
0.25	0.5987	1.25	0.8944	2.25	0.9878
0.30	0.6179	1.30	0.9032	2.30	0.9893
0.35	0.6368	1.35	0.9115	2.35	0.9906
0.40	0.6554	1.40	0.9192	2.40	0.9918
0.45	0.6736	1.45	0.9265	2.45	0.9929
0.50	0.6915	1.50	0.9332	2.50	0.9938
0.55	0.7088	1.55	0.9394	2.55	0.9946
0.60	0.7257	1.60	0.9452	2.60	0.9953
0.65	0.7422	1.65	0.9505	2.65	0.9960
0.70	0.7580	1.70	0.9554	2.70	0.9965
0.75	0.7734	1.75	0.9599	2.75	0.9970
0.80	0.7881	1.80	0.9641	2.80	0.9974
0.85	0.8023	1.85	0.9678	2.85	0.9978
0.90	0.8159	1.90	0.9713	2.90	0.9981
0.95	0.8289	1.95	0.9744	2.95	0.9984
1.00	0.8413	2.00	0.9772	3.00	0.9987

Tabelle 1: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.