

**Klausur**  
Wahrscheinlichkeitstheorie und Inferenz I  
Wintersemester 2011/2012

Marco Cattaneo  
Institut für Statistik

**Name:** Name, Vorname

**Matrikelnummer:** 0123456

**Wichtig:**

- Überprüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur besteht aus vier Aufgaben. Kontrollieren Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich den Klausurbogen (Vorder- und Rückseite), Zusatzblätter werden auf Anfrage ausgeteilt.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind das ausgedruckte Skript sowie ein nicht-programmierbarer Taschenrechner. Bücher, alte Klausuren und Übungsaufgaben inkl. Lösung sind NICHT zugelassen. Handschriftliche Ergänzungen aus der Vorlesung können im Skript eingefügt sein, jedoch keine Lösungen bzw. Lösungsskizzen von Übungs- und Klausuraufgaben und keine aus Büchern übernommene Passagen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

**Viel Erfolg!**

Punkte:

Note:

## Aufgabe 1

- a) Es sei der Ergebnisraum  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  gegeben und das Mengensystem

$$\mathcal{E} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \Omega\}.$$

Bestimmen Sie die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ .

(2 Pkt.)

- b) Berechnen Sie die Maße  $\mu_Z$ ,  $\mu_Z|_{\mathbb{Z}}$ ,  $\lambda$  und  $\lambda|_{[1,4]}$  für die Menge

$$A = \{-1, 1.5, 3\}.$$

(2 Pkt.)

- c) Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt definiert:

$$F(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < -1 \\ x & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ x+1 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{für } 1 \leq x \end{cases}$$

Sei  $\lambda_F$  das zu  $F$  gehörende Lebesgue-Stieltjes-Maß.

Bestimmen Sie  $\lambda_F((-\infty, a])$  für  $a \in \{-3, -0.5, 0.5, 1\}$ .

(2 Pkt.)

- d) Sei

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, (-\infty, -1], (-1, \infty), \mathbb{R}\}, \quad \Omega_1 = \mathbb{R},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, [0, \frac{1}{4}), [\frac{1}{4}, 1], [0, 1]\}, \quad \Omega_2 = [0, 1], \text{ und}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- i) Bestimmen Sie das Urbild  $g^{-1}(\mathcal{F}_2)$ .

(2 Pkt.)

- ii) Ist die Abbildung  $g : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  messbar?

(2 Pkt.)

- e) Untersuchen Sie, ob es sich bei der folgenden Funktion  $h$  um eine  $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$ -messbare Funktion handelt.

$$h(x) = x^2 I_{\mathbb{N}}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(2 Pkt.)

## Lösung

- a)  $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \Omega\}$

- b)  $\mu(A) = 3, \quad \mu_Z|_{\mathbb{Z}}(A) = 2, \quad \lambda(A) = 0, \quad \lambda|_{[1,4]}(A) = 0.$

- c)  $\lambda_F((-\infty, a]) = F(a) - \underbrace{\lim_{k \rightarrow -\infty} F(k)}_{-1} = F(a) + 1$

$$\lambda_F((-\infty, -3]) = -1 + 1 = 0$$

$$\lambda_F((-\infty, -0.5]) = -0.5 + 1 = 0.5$$

$$\lambda_F((-\infty, 0.5]) = 1.5 + 1 = 2.5$$

$$\lambda_F((-\infty, 1]) = 2 + 1 = 3$$

d)    i)  $g^{-1}([0, \frac{1}{4})) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [0, \frac{1}{4})\} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$g^{-1}([\frac{1}{4}, 1]) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [\frac{1}{4}, 1]\} = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$$

$$g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$g^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$$

ii) Nein, denn  $g^{-1}([0, \frac{1}{4})) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin \mathcal{F}_1$ .

e)  $h(x) = x^2 I_{\mathbb{N}}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

$h_1(x) = x^2$  ist messbar, da stetig, und  $h_2(x) = I_{\mathbb{N}}(x)$  ist messbar, da  $\mathbb{N} \in \mathcal{B}$  (vgl.

Bsp. 2.7 und Satz 2.7 iv))  $\xRightarrow{\text{Satz 2.18b)}} h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$  ist messbar.

**Aufgabe 2**

Seien  $X$  und  $Z$  unabhängige reelle Zufallsvariablen mit zugehörigen Dichten

$$f_X(x) = cx(1-x)I_{[0,1]}(x) \quad \text{und} \quad f_Z(z) = 2zI_{[0,1]}(z).$$

- a) Zeigen Sie, dass  $c = 6$ . (2 Pkt.)  
 b) Zeigen Sie, dass  $f_{X^2}(y) = 3(1 - \sqrt{y}) \cdot I_{[0,1]}(y)$  die Dichte von  $X^2$  ist. (3 Pkt.)  
 c) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von  $(X^2, Z)$ . (1 Pkt.)  
 d) Berechnen Sie  $\mathbb{P}(X^2 \leq 0.5)$ . (2 Pkt.)  
 e) Berechnen Sie  $\mathbb{P}(X^2 \leq Z)$ . (2 Pkt.)

**Lösung:**

a)

$$c \cdot \int_0^1 x(1-x) dx = c \cdot \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = c \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = c \cdot \frac{1}{6} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = 6$$

b)

$$\left. \begin{array}{lcl} Y = X^2 & & \\ g(x) & = x^2 & = y \\ g^{-1}(y) & = \sqrt{y} & = x \\ \frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y} & = \frac{1}{2\sqrt{y}} & \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Trafo}} f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = 3(1 - \sqrt{y}) \cdot I_{[0,1]}(y)$$

c)

$$\begin{aligned} f_{X^2,Z}(y,z) &= f_Y(y)f_Z(z) \\ &= 3(1 - \sqrt{y}) \cdot 2z \\ &= 6z(1 - \sqrt{y})I_{[0,1]}(y)I_{[0,1]}(z) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X^2 \leq 0.5) &= \mathbb{P}(Y \leq 0.5) \\ &= \int_0^{0.5} 3(1 - \sqrt{y}) dy \\ &= [3y]_0^{0.5} - 3 \frac{2}{3} [y^{3/2}]_0^{0.5} \\ &= 1.5 - 2 \cdot 0.5^{3/2} \approx 0.793 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X^2 \leq Z) &= \mathbb{P}(Y \leq Z) \\ &= \int_0^1 \int_0^z 6z(1 - \sqrt{y}) \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^z 6z - 6zy^{1/2} \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 6z^2 - 4z^{5/2} \, dz \\ &= 6 \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^1 - 4 \left[ \frac{z^{7/2}}{7/2} \right]_0^1 \\ &= 2 - \frac{8}{7} \approx 0.857\end{aligned}$$

Alternativ:

$$\mathbb{P}(X^2 \leq Z) = \int_0^1 \int_y^1 6z(1 - \sqrt{y}) \, dz \, dy = \dots \approx 0.857$$

**Aufgabe 3**

Seien  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$  unabhängig identisch verteilt mit bekannter Varianz  $\sigma^2$  und Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \frac{1}{2} & , x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{2}e^{-x} & , x \geq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$Z_n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 4X_i \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2) \quad (8 \text{ Pkt.})$$

mit  $Z_n = \sqrt{n} [\bar{Y} - \frac{1}{4}]$  und  $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ . Geben Sie bei der Lösung an, welche Sätze aus dem Skript Sie verwenden.

**Hinweis:** Zeigen Sie zunächst, dass  $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{4}$ .

**Lösung**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_i) &= \mathbb{E}(Y_i) = \int_{-1}^0 x \frac{1}{2} dx + \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-x}}{2} dx \\ &\stackrel{\text{PI}}{=} \frac{[x^2]_{-1}^0}{4} + \frac{[xe^{-x}]_0^{\infty}}{-2} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{2} dy \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{[e^{-x}]_0^{\infty}}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 4X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(4X_i) = 1 \quad (\text{GGZ})$
- $Z_n = \sqrt{n} [\bar{Y} - \frac{1}{4}] = \sqrt{n} [\bar{Y} - \mathbb{E} Y_i] \xrightarrow{D} Z \sim N(0, \sigma^2) \quad (\text{ZGWS})$

$$\Rightarrow \quad Z_n \cdot \frac{\sum_{i=1}^n 4X_i}{n} \xrightarrow{D} Z \cdot 1 \sim N(0, \sigma^2) \quad (\text{Slutsky's Theorem})$$

### Aufgabe 4

- a) Sei  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Meßraum  $(\Omega, \mathcal{F})$  und  $A, B \in \mathcal{F}$ . Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{4}$ . Wie groß ist dann  $\mathbb{P}(A \cup B)$ ? (1 Pkt.)
- b) Gegeben sei der Maßraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_z)$  mit dem Zählmaß  $\mu_z$ . Für das Maß  $\nu$  auf  $\mathcal{F}$  gelte:

$$\nu(\{\omega\}) = (f \odot \mu_z)(\{\omega\}) = \frac{5}{\omega 2^\omega} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Berechnen Sie das Integral  $\int h \, d\nu$  für die Abbildung  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(\omega) = \omega$ . (1 Pkt.)

**Hinweis:**  $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1$ .

- c) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} 2, & \text{falls } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ 5, & \text{falls } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie groß sind

$$\int f \, d\lambda \quad \text{und} \quad \int f \, d\mu_z?$$

( $\lambda$  bezeichnet das Lebesguemaß und  $\mu_z$  das Zählmaß) (1 Pkt.)

- d) Kennzeichnen Sie jeweils die symmetrische Differenz  $A \triangle B$  in Abbildung 1. (1 Pkt.)

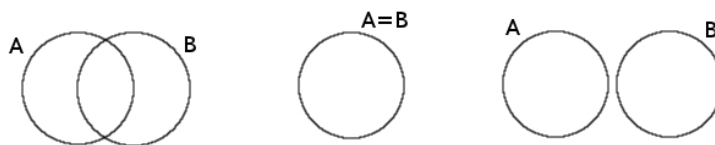


Abbildung 1: Symmetrische Differenz

- e) In einer Ebene sind 10 Geraden gegeben, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen. Wie viele Schnittpunkte bilden sie? (1 Pkt.)
- f) Wann ist ein Maß ein Wahrscheinlichkeitsmaß? (1 Pkt.)

### Lösung

- a)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) &\stackrel{\text{de Morgan}}{=} \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = \frac{3}{4} \\ \mathbb{P}(A \cup B) &\stackrel{\text{Satz 4.4 i)}}{=} 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b)

$$\int h \, d\nu = \int h \, d(f \odot \mu_z) = \int \omega \cdot \frac{5}{\omega 2^\omega} \, d\mu_z = \int \frac{5}{2^\omega} \, d\mu_z \stackrel{\Omega=\mathbb{N}}{=} 5 \cdot \sum_{\omega=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^\omega = 5 \cdot 1 = 5$$

c)

$$\begin{aligned} \int f \, d\lambda &= \int_{[0,1)} f \, d\lambda + \int_{\{1,2,3,4,5,6\}} f \, d\lambda \\ &= 5 \cdot \lambda([0,1)) + 2 \cdot \lambda(\{1,2,3,4,5,6\}) \\ &= 5(1-0) + 2 \cdot 0 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu_Z &= \int_{[0,1)} 5 \, d\mu_Z + \int_{\{1,2,3,4,5,6\}} 2 \, d\mu_Z \\ &= 5 \cdot \mu_Z([0,1)) + 2 \cdot \mu_Z(\{1,2,3,4,5,6\}) \\ &= 5 \cdot \infty + 2 \cdot 6 = \infty \end{aligned}$$

d) Siehe Abbildung 2.

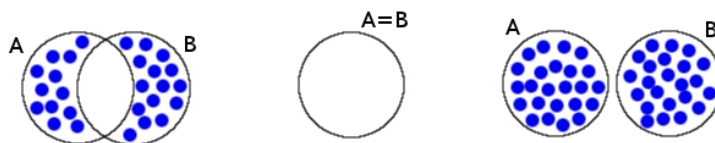


Abbildung 2: Symmetrische Differenz

e)  $\binom{10}{2} = 45$

f) Wenn die Normiertheitsbedingung erfüllt ist, d.h.  $\mu(\Omega) = 1$ .