

Nachklausur
Statistik III
Wintersemester 2009/2010

Prof. Dr. Torsten Hothorn
Institut für Statistik

Name: Name, Vorname

Matrikelnummer: 0123456

Unterschrift:

Wichtig:

- Überprüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben, einem Deckblatt und der Standardnormalverteilung im Anhang. Kontrollieren Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich den Klausurbogen (Vorder- und Rückseite), Zusatzblätter werden auf Anfrage ausgeteilt.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind alle Mitschriften der Vorlesung und der Übung, das ausgedruckte Skript sowie Bücher und ein Taschenrechner.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Ich bin damit einverstanden, daß das Klausurergebnis unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Seite

<http://www.stat.uni-muenchen.de/~hothorn>

veröffentlicht wird. (Bei Nichtzutreffen bitten streichen.)

Aus 0,00% bearbeiteten Übungsaufgaben haben Sie bereits **0,0** Bonuspunkte erworben. ✓

Viel Erfolg!

Punkte:

Note:

Aufgabe 1

Bei einem Multiple-Choice-Test wird einem Studenten eine Frage gestellt, zu der es n Antworten gibt. Hat sich der Student vorbereitet, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \in (0, 1)$ geschieht, so beantwortet er die Frage korrekt; ansonsten kann er nur raten und wählt zufällig eine der n Antworten aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student vorbereitet war, falls er die Frage richtig beantwortet hat? (4 Pkt.)

Lösung:

Gegeben:

V – Der Student ist vorbereitet

K – Die Antwort ist korrekt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K|V) &= 1 & \mathbb{P}(K|\bar{V}) &= \frac{1}{n} \\ \mathbb{P}(V) &= p & \mathbb{P}(\bar{V}) &= 1 - p\end{aligned}$$

Gesucht:

$$\mathbb{P}(V|K) = ?$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K) &= \mathbb{P}(K|V) \cdot \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(K|\bar{V}) \cdot \mathbb{P}(\bar{V}) \\ &= 1 \cdot p + \frac{1}{n}(1 - p) \\ &= \frac{(n-1)p + 1}{n} \\ \Rightarrow \mathbb{P}(V|K) &= \frac{\mathbb{P}(K|V) \cdot \mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(K)} \\ &= \frac{np}{(n-1)p + 1}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die Füllmenge einer automatisch abgefüllten Kaffeepackung lasse sich durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 500[\text{g}]$ und Varianz $\sigma^2 = 4[\text{g}^2]$ beschreiben.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllung einer zufällig ausgewählten Kaffeepackung weniger als 495[g] beträgt? (**2 Pkt.**)
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllung einer zufällig ausgewählten Kaffeepackung mehr als 2.5[g] vom Erwartungswert abweicht. (**2 Pkt.**)
Welches Ergebnis liefert die Ungleichung von Tschebyschow? (**2 Pkt.**)
- Welche Mindestfüllmenge darf auf der Verpackung angegeben werden, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Füllmenge unterschritten wird, höchstens 0.01 betragen soll? (**3 Pkt.**)

Hinweis: Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung finden Sie im Anhang.

Lösung:

$$X \sim N(500, 4)$$

$$\text{a) } \mathbb{P}(X \leq 495) = \Phi\left(\frac{495 - 500}{2}\right) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) \approx 0.006$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X - 500| > 2.5) &= \mathbb{P}(X - 500 > 2.5) + \mathbb{P}(X - 500 < -2.5) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X - 500}{2} > 1.25\right) + \mathbb{P}\left(\frac{X - 500}{2} < -1.25\right) \\ &= 1 - \Phi(1.25) + 1 - \Phi(1.25) \approx 0.212\end{aligned}$$

Die Ungleichung von Tschebyschow liefert:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X - 500| > 2.5) &= \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) > 2.5) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{2.5^2} \\ &= \frac{4}{2.5^2} = 0.64\end{aligned}$$

c) c bezeichne die Mindestfüllmenge. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < c) &\leq 0.01 \\ \Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{X - 500}{2} < \frac{c - 500}{2}\right) &\leq 0.01 \\ \Rightarrow \Phi\left(\frac{c - 500}{2}\right) &\leq 0.01 \\ \Rightarrow \frac{c - 500}{2} &\leq -2.35 \approx u_{0.01} \\ \Rightarrow c &\leq -2.35 \cdot 2 + 500 = 495.3\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq -2 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot x, & \text{für } -2 < x \leq 0 \\ c_1 + c_2 \cdot (1 - \exp(-x)), & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$. **(2 Pkt.)**
 (b) Zeigen Sie, dass $c_1 = \frac{1}{4}$ und $c_2 = \frac{3}{4}$. **(5 Pkt.)**
 (c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X > -1)$. **(2 Pkt.)**

Lösung:

$$(a) f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq -2 \\ \frac{1}{8}, & \text{für } -2 < x \leq 0 \\ c_2 \cdot \exp(-x), & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(b) Bestimmung von c_2 :

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &\stackrel{!}{=} 1 \quad (\text{Skript Satz 4.14}) \\ \int f(x) dx &= \int_{-2}^0 \frac{1}{8} dx + \int_0^{\infty} c_2 \cdot \exp(-x) dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x \right]_{-2}^0 + c_2 \cdot [-\exp(-x)]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{4} + c_2 \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow c_2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Bestimmung von c_1 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &\stackrel{!}{=} 1 \quad (\text{Skript Definition 4.10}) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} c_1 + \frac{3}{4} \cdot (1 - \exp(-x)) \\ &= c_1 + \frac{3}{4} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > -1) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq -1) \\ &= 1 - F(-1) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot (-1) \right) = 0.875 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Sei X gammaverteilt mit der Dichte

$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx), \quad x > 0, a > 0, b > 0.$$

Bestimmen Sie die Dichte von $Y = \frac{1}{X}$. (4 Pkt.)

Lösung:

$$\begin{aligned} y = g(x) &= \frac{1}{x} \\ \iff h(y) &= \frac{1}{y} \\ \frac{\partial h(y)}{\partial y} &= -\frac{1}{y^2} \\ f_Y(y) &= f_X(h(y)) \cdot \left| \frac{\partial h(y)}{\partial y} \right| \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{y} \right)^{a-1} \exp \left(-b \cdot \frac{1}{y} \right) \cdot \left| -\frac{1}{y^2} \right| \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{y} \right)^{a+1} \exp \left(-\frac{b}{y} \right) \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Sind die folgenden Aussagen **richtig oder falsch** (mit kurzer Begründung)?

- (a) Sei $\Omega = \mathbb{R}^+$.

Dann ist das Mengensystem

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, (1, \infty), [0, 1], [1, \infty), [0, 1]\}$$

eine σ -Algebra. (1 Pkt.)

Lösung:

Falsch. $[0, 1) \cup (1, \infty) \notin \mathcal{F}$ und somit ist (S3) verletzt.

Auch Begründung, dass \mathbb{R}^+ nicht die Null enthält ist möglich.

- (b) Über der Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sei der Erzeuger $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{4, 5\}\}$ gegeben. Die folgenden Mengen sind Elemente der von \mathcal{E} erzeugten σ -Algebra $\sigma(\mathcal{E})$:

- (i) $\{3\}$ (1 Pkt.)

- (ii) $\{1, 2, 3, 6\}$ (1 Pkt.)

- (iii) $\{3, 4, 5\}$ (1 Pkt.)

Lösung:

$$\sigma(\mathcal{E}) = \{\Omega, \emptyset, \{1, 2\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{3, 6\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}\} \Rightarrow$$

- (i) falsch.

- (ii) richtig.

- (iii) falsch.

- (c) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

ist die Dichte einer Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. (2 Pkt.)

Lösung:

Falsch.

$$\int f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^{\infty} = \infty \neq 1$$

- (d) Die Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f_X(x) = 2x I_{[0,1]}(x).$$

Dann gilt für die Zufallsvariable $Y = a + bX^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$ fest):

$$\mathbb{E}(Y) = a + \frac{b}{2}. \quad (2 \text{ Pkt.})$$

Lösung:

Richtig.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(a + bX^2) \\ &= a + b \cdot \mathbb{E}(X^2) \\ &= a + b \cdot \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx \\ &= a + b \cdot \left[\frac{2}{4} \cdot x^4 \right]_0^1 = a + \frac{b}{2} \end{aligned}$$

- (e) Sei (Ω, \mathbb{P}) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt für $A, B \subseteq \Omega$ und $0 < \mathbb{P}(B) < 1$:

$$A, B \text{ unabhängig} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\bar{B}).$$

(1 Pkt.)

Lösung:

Richtig. Mit Satz 6.7(b) folgt, dass auch A, \bar{B} unabhängig und mit Satz 6.7(a) gilt dann $\mathbb{P}(A|\bar{B}) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$.

Aufgabe 6

Sei Y eine $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable und X_i , $i = 1, \dots, n$, $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen.

Zeigen Sie, dass

$$\frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{D} N(0, 1). \quad (5 \text{ Pkt.})$$

Lösung:

Gesetz der großen Zahlen \Rightarrow

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{V}(X_i) + \underbrace{\mathbb{E}(X_i)^2}_{=0} = 1$$

Satz 9.7 \Rightarrow

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sqrt{1} = 1$$

Slutzky's Theorem \Rightarrow

$$\frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
-3.00	0.0013	-1.00	0.1587	1.00	0.8413
-2.95	0.0016	-0.95	0.1711	1.05	0.8531
-2.90	0.0019	-0.90	0.1841	1.10	0.8643
-2.85	0.0022	-0.85	0.1977	1.15	0.8749
-2.80	0.0026	-0.80	0.2119	1.20	0.8849
-2.75	0.0030	-0.75	0.2266	1.25	0.8944
-2.70	0.0035	-0.70	0.2420	1.30	0.9032
-2.65	0.0040	-0.65	0.2578	1.35	0.9115
-2.60	0.0047	-0.60	0.2743	1.40	0.9192
-2.55	0.0054	-0.55	0.2912	1.45	0.9265
-2.50	0.0062	-0.50	0.3085	1.50	0.9332
-2.45	0.0071	-0.45	0.3264	1.55	0.9394
-2.40	0.0082	-0.40	0.3446	1.60	0.9452
-2.35	0.0094	-0.35	0.3632	1.65	0.9505
-2.30	0.0107	-0.30	0.3821	1.70	0.9554
-2.25	0.0122	-0.25	0.4013	1.75	0.9599
-2.20	0.0139	-0.20	0.4207	1.80	0.9641
-2.15	0.0158	-0.15	0.4404	1.85	0.9678
-2.10	0.0179	-0.10	0.4602	1.90	0.9713
-2.05	0.0202	-0.05	0.4801	1.95	0.9744
-2.00	0.0228	0.00	0.5000	2.00	0.9772
-1.95	0.0256	0.05	0.5199	2.05	0.9798
-1.90	0.0287	0.10	0.5398	2.10	0.9821
-1.85	0.0322	0.15	0.5596	2.15	0.9842
-1.80	0.0359	0.20	0.5793	2.20	0.9861
-1.75	0.0401	0.25	0.5987	2.25	0.9878
-1.70	0.0446	0.30	0.6179	2.30	0.9893
-1.65	0.0495	0.35	0.6368	2.35	0.9906
-1.60	0.0548	0.40	0.6554	2.40	0.9918
-1.55	0.0606	0.45	0.6736	2.45	0.9929
-1.50	0.0668	0.50	0.6915	2.50	0.9938
-1.45	0.0735	0.55	0.7088	2.55	0.9946
-1.40	0.0808	0.60	0.7257	2.60	0.9953
-1.35	0.0885	0.65	0.7422	2.65	0.9960
-1.30	0.0968	0.70	0.7580	2.70	0.9965
-1.25	0.1056	0.75	0.7734	2.75	0.9970
-1.20	0.1151	0.80	0.7881	2.80	0.9974
-1.15	0.1251	0.85	0.8023	2.85	0.9978
-1.10	0.1357	0.90	0.8159	2.90	0.9981
-1.05	0.1469	0.95	0.8289	2.95	0.9984

Tabelle 1: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.