

Klausur
Wahrscheinlichkeitstheorie und Inferenz I
Wintersemester 2010/2011

Prof. Dr. Torsten Hothorn
Institut für Statistik

Name: Name, Vorname

Matrikelnummer: 0123456

Unterschrift:

Wichtig:

- Kontrollieren Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer. Überprüfen Sie, ob Ihr Klausur-exemplar vollständig ist. Die Klausur besteht aus **vier** Aufgaben und einem Deckblatt.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich den Klausurbogen (Vorder- und Rücksei-te), Zusatzblätter werden auf Anfrage ausgeteilt.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind alle Mitschriften der Vorlesung und der Übung, das aus-gedruckte Skript sowie Bücher und ein Taschenrechner.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Ich bin damit einverstanden, daß das Klausurergebnis unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Seite

<http://www.stat.uni-muenchen.de/~hothorn>

veröffentlicht wird. (Bei Nichtzutreffen bitten streichen.)

Es sind insgesamt 33 Punkte zu erreichen.

Aus 0% bearbeiteten Übungsaufgaben haben Sie bereits **0** Bonuspunkte erworben. ✓

Viel Erfolg!

Punkte:

Note:

Aufgabe 1

- (a) Sei
- X
- eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable mit zugehöriger Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y = \frac{1}{X}$.

(2 Pkt.)

Welcher Verteilung folgt Y ?

(1 Pkt.)

- (b) Seien
- X_1
- und
- X_2
- zwei unabhängige
- $U(0,1)$
- verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie mittels Dichtetransformation, dass die Zufallsvariable
- $U = X_1 \cdot X_2$
- die folgende Dichte besitzt:

$$f_U(u) = -\ln(u), \quad u \in (0,1). \quad (4 \text{ Pkt.})$$

Hinweis: Verwenden Sie zum Beispiel die Baire-Funktion $g(x_1, x_2) = (x_1 \cdot x_2, x_2)$.**Lösung:**

$$(a) \quad Y = \frac{1}{X} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1}{Y} \quad \Rightarrow \quad h(y) = g^{-1}(y) = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d}{dy} \frac{1}{y} = -\frac{1}{y^2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{y}\right)^2\right)} \cdot \left| \frac{1}{y^2} \right| = \frac{1}{\pi \cdot \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) \cdot y^2} = \frac{1}{\pi \cdot (y^2 + 1)}$$

 $\Rightarrow Y$ ist wieder Cauchy-verteilt.

$$(b) \quad U := X_1 \cdot X_2$$

$$g(x_1, x_2) = (\underbrace{x_1 \cdot x_2}_u, \underbrace{x_2}_v) = (u, v)$$

$$(I): \quad u = x_1 \cdot x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{u}{x_2} \stackrel{(II)}{=} \frac{u}{v}$$

$$(II): \quad v = x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = v$$

$$\Rightarrow h(u, v) = g^{-1}(u, v) = \left(\frac{u}{v}, v\right)$$

$$\Rightarrow \det \left(\frac{\partial h(u, v)}{\partial u \partial v} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{v} \cdot 1 - 0 \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) = \frac{1}{v}$$

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int f_{X_1, X_2}(h(u, v)) \cdot \left| \det \left(\frac{\partial h(u, v)}{\partial u \partial v} \right) \right| dv \\ &= \int f_{X_1, X_2} \left(\frac{u}{v}, v \right) \cdot \left| \frac{1}{v} \right| dv \\ &= \int I_{[0,1]} \left(\frac{u}{v} \right) \cdot I_{[0,1]}(v) \cdot \frac{1}{v} dv \\ &= \int_u^1 \frac{1}{v} dv = [\ln v]_u^1 = -\ln u \quad \text{für } u \in (0, 1) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit zugehöriger Dichte

$$f_X(x; c) = \begin{cases} c \cdot x \cdot e^{-2x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Konstante $c = 4$. (2 Pkt.)

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ von X . (2 Pkt.)

c) Die zugehörige Verteilungsfunktion von X ist

$$F_X(x) = 1 - e^{-2x}(1 + 2x).$$

Berechnen Sie anhand der Verteilungsfunktion $\mathbb{P}(X^2 \leq k)$, $k \in \mathbb{R}$ fest. (2 Pkt.)
(Es muss keine Dichtetransformation angewandt werden!)

d) Sei $Y = g(X)$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 4 \\ \frac{1}{4} \cdot x^{-1} & , x > 4. \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$. (2 Pkt.)

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \underbrace{c}_{f'} \cdot \underbrace{x}_{f'} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{g'} dx &\stackrel{\text{PI}}{=} \left[\underbrace{cx}_{f'} \underbrace{\frac{e^{-2x}}{-2}}_{g'} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \underbrace{c}_{f'} \underbrace{\frac{e^{-2x}}{-2}}_{g'} dx \\ &= \frac{c}{2} \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^{+\infty} = \frac{c}{4} \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow \quad c &= 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{\infty} 4x^2 e^{-2x} dx \\ &\stackrel{\text{PI}}{=} \underbrace{\left[4x^2 \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} 8x \frac{e^{-2x}}{-2} dx \\ &\stackrel{\text{PI}}{=} \underbrace{\left[4x \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} 4 \frac{e^{-2x}}{-2} dx \\ &= \left[2 \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^{\infty} = 1 \end{aligned}$$

Alternative 1:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \int_0^{\infty} 4x^2 e^{-2x} dx \\
 &\stackrel{\text{PI}}{=} \underbrace{\left[4x^2 \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} 8x \frac{e^{-2x}}{-2} dx \\
 &= \underbrace{\int_0^{\infty} 4 \cdot x \cdot e^{-2x} dx}_{\text{Integral über Dichte aus Aufgabenstellung}} = 1
 \end{aligned}$$

Alternative 2:

Die Dichte ist die einer Gammaverteilung: $X \sim \Gamma(2, 2) \Rightarrow$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{2} = 1.$$

c)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X^2 \leq k) &= \mathbb{P}(-\sqrt{k} \leq X \leq \sqrt{k}) \\
 &= F_X(\sqrt{k}) - \underbrace{F_X(-\sqrt{k})}_0 \\
 &= F_X(\sqrt{k}) = \begin{cases} 1 - e^{-2\sqrt{k}}(1 + 2\sqrt{k}), & k \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(g(X)) = \int_0^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx \\
 &= \int_0^4 4x \cdot e^{-2x} dx + \int_4^{\infty} \frac{1}{4x} \cdot 4x \cdot e^{-2x} dx \\
 &= F(4) + \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_4^{\infty} \\
 &= 1 - 9e^{-8} + \frac{e^{-8}}{2} = \frac{2 - 17e^{-8}}{2} \approx 0.997
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ ein Maßraum und

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) &= x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{A} = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}.$$

(a) Bestimmen Sie das Urbild

$$f^{-1}(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}. \quad (3 \text{ Pkt.})$$

(b) Sei λ_f das Bildmaß des Lebesguemaßes λ unter f . Bestimmen Sie das Bildmaß

$$\lambda_f(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}. \quad (3 \text{ Pkt.})$$

Hinweis: Unterscheiden Sie in (a) und (b) jeweils die drei Fälle:

Fall 1: $A = (a, b]$ mit $a < 0, b < 0$.

Fall 2: $A = (a, b]$ mit $a < 0, b \geq 0$.

Fall 3: $A = (a, b]$ mit $a \geq 0, b \geq 0$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \text{Fall 1: } f^{-1}(A) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in (a, b], a < 0, b < 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in (a, b], a < 0, b < 0\} = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fall 2: } f^{-1}(A) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in (a, b], a < 0, b \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in (a, b], a < 0, b \geq 0\} = [-\sqrt{b}, \sqrt{b}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fall 3: } f^{-1}(A) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in (a, b], a \geq 0, b \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in (a, b], a \geq 0, b \geq 0\} = [-\sqrt{b}, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, \sqrt{b}] \end{aligned}$$

(b)

$$\text{Fall 1: } \lambda_f(A) = \lambda(f^{-1}(A)) = \lambda(\emptyset) = 0$$

$$\text{Fall 2: } \lambda_f(A) = \lambda(f^{-1}(A)) = \lambda([-\sqrt{b}, \sqrt{b}]) = 2\sqrt{b}$$

$$\begin{aligned} \text{Fall 3: } \lambda_f(A) &= \lambda(f^{-1}(A)) = \lambda([-\sqrt{b}, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, \sqrt{b}]) = -\sqrt{a} - (-\sqrt{b}) + \sqrt{b} - \sqrt{a} \\ &= 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

- a) 10 Personen verabschieden sich voneinander mit Händedruck. Jeder geht allein nach Hause. Wie oft werden Hände gedrückt? (1 Pkt.)

- b) (i) Sei $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$.
Bestimmen Sie $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$, d.h. die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra. (1 Pkt.)
(ii) Sei $\Omega_2 = \{2, 7\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$X : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$$
$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{falls } \omega = 1, 2, 3, 4 \\ 7 & \text{falls } \omega = 5, 6 \end{cases}$$

eine Zufallsvariable über (Ω_1, \mathcal{F}) ist. (2 Pkt.)

- (iii) Geben Sie eine Funktion $Y : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ an, die *keine* Zufallsvariable über (Ω_1, \mathcal{F}) ist. (1 Pkt.)

- c) Es sei $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{2, 3, 6\}$, $A_3 = \{1, 2, 4, 6\}$ und \mathbb{P} die diskrete Gleichverteilung mit Träger $\{1, \dots, 6\}$.

- (i) Überprüfen Sie, ob

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right) = \prod_{i=1}^3 \mathbb{P}(A_i). \quad (1 \text{ Pkt.})$$

- (ii) Sind die Ereignisse A_1, A_2, A_3 stochastisch unabhängig? (1 Pkt.)

- d) Die momenterzeugende Funktion einer negativ binomialverteilten Zufallsvariable $X \sim B^{-1}(n, p)$ lautet:

$$M_X(s) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)e^s} \right)^n.$$

Es seien X_1, \dots, X_n stu Zufallsvariablen mit $X_i \sim B^{-1}(n_i, p)$, $i = 1, \dots, n$. Welcher Verteilung folgt $Y = \sum_{i=1}^n X_i$? (2 Pkt.)

(Bitte auch die Parameter der Verteilung angeben!)

- e) Gegeben sei der Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_z)$ mit dem Zählmaß μ_z . Für das Maß ν auf \mathcal{F} gelte:

$$\nu(\{\omega\}) = (f \odot \mu_z)(\{\omega\}) = \frac{5}{\omega 2^\omega} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Berechnen Sie das Integral $\int h d\nu$ für die Abbildung $h : \Omega \rightarrow \Omega$ mit $h(\omega) = \omega$. (1 Pkt.)

Hinweis: $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1$.

- f) Sei $X_i \sim N(0, \sigma^2)$. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{X_i^2}{n}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \exp(\sigma^2). \quad (2 \text{ Pkt.})$$

Lösungen:

a)

$$\binom{10}{2} = 45, \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^9 i = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

b) (i)

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E}) = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4\}, \emptyset, \Omega_1\}$$

(ii) Ja, denn X ist messbar bezüglich \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} X^{-1}(\{2\}) &= \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{F} \\ X^{-1}(\{7\}) &= \{5, 6\} \in \mathcal{F} \\ X^{-1}(\{\emptyset\}) &= \emptyset \in \mathcal{F} \\ X^{-1}(\Omega_2) &= \Omega_1 \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

(iii) Zum Beispiel

$$Y(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{falls } \omega = 1 \\ 7 & \text{falls } \omega = 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases}$$

c) (i)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{6} = \prod_{i=1}^3 \mathbb{P}(A_i) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{6} \quad \checkmark$$

(ii) Nein, denn

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(\{2, 3\}) = \frac{1}{3} \neq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

d)

$$M_Y = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(s) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p}{1 - (1-p)e^s} \right)^{n_i} = \left(\frac{p}{1 - (1-p)e^s} \right)^{\sum n_i}$$

$$\Rightarrow \sum X_i \sim B^{-1}(\sum n_i, p)$$

e)

$$\int h \, d\nu = \int h \, d(f \odot \mu_z) = \int \omega \cdot \frac{5}{\omega^{2\omega}} \, d\mu_Z = \int \frac{5}{2^\omega} \, d\mu_Z = 5 \cdot \sum_{\omega=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^\omega = 5 \cdot 1 = 5$$

f)

$$\text{GdgZ:} \quad \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{V}(X_i) + (\mathbb{E}X_i)^2 = \sigma^2$$

$$\text{Satz 9.7:} \quad \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{X_i^2}{n}\right) = \exp\left[\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n}\right] \xrightarrow{\mathbb{P}} \exp(\sigma^2)$$