

Nachholklausur
Statistik III
Sommersemester 2008

Prof. Dr. Torsten Hothorn
Institut für Statistik

Name: Name, Vorname

Matrikelnummer: 0123456

Wichtig:

- Überprüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben (jeweils zwei Seiten) sowie einem Deckblatt. Kontrollieren Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich den Klausurbogen (Vorder- und Rückseite), Zusatzblätter werden auf Anfrage ausgeteilt.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind alle Mitschriften der Vorlesung und der Übung, das ausgedruckte Skript sowie Bücher und ein Taschenrechner.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Ich bin damit einverstanden, daß das Klausurergebnis unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Seite

<http://www.stat.uni-muenchen.de/~hothorn>

veröffentlicht wird.

Viel Erfolg!

Punkte:

Note:

Aufgabe 1

Sind die folgenden Fragen richtig oder falsch (mit kurzer Begründung)?

- a) Im \mathbb{R}^2 ist das Lebesgue-Maß einer Strecke deren Länge. (1 Pkt.)
Nicht richtig, deren Lebesgue-Maß ist 0.
- b) Sei $\Omega = \{a, b, c\}$ und $A = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Dann stimmt A mit der von A erzeugten σ -Algebra $\sigma(A)$ überein. (1 Pkt.)
Nicht richtig, denn A enthält die leere Menge nicht, wohl aber jede σ -Algebra.
- c) Ist $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X und besitzt $F_X(x)$ an der Stelle x_0 eine Sprungstelle, so ist $\mathbb{P}(X = x_0) > 0$. (1 Pkt.)
Richtig, denn eine Sprungstelle in einer Verteilungsfunktion kennzeichnet diese Stelle als Punkt mit positiver Wahrscheinlichkeit.
- d) Ist $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X so gilt
 $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$. (1 Pkt.)
Nicht richtig, denn $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$ und $P(X = b)$ muß nicht 0 sein.
- e) Ist $X \sim N(0, 1)$ so gilt $X + 2 \sim N(2, 2)$. (1 Pkt.)
Nicht richtig, denn $X + 2 \sim N(2, 1)$.
- f) Sind X und Y unkorreliert, so sind auch X und $-Y$ unkorreliert. (1 Pkt.)
Richtig, denn

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= -(\mathbb{E}(X(-Y)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(-Y)) = \text{Cov}(X, -Y)\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Der Bogenschütze Xaver Pfeil schießt übungshalber auf eine Scheibe mit Radius 1m. Der Abstand des Treffpunktes vom Scheibenzentrum X kann als eine stetige reelle Zufallsvariable aufgefaßt werden mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = c(x-1)^2 I_{(0,1)}(x), x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

- Berechnen Sie die Konstante c . (Falls das nicht gelingt, behalten Sie c in den folgenden Aufgaben bei.) **(2 Pkt.)**
- Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{V}(X)$. **(6 Pkt.)**
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ der Zufallsvariable X . **(2 Pkt.)**
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Abstand X kleiner als 0.2 ist? **(1 Pkt.)**
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Abstand X zwischen 0.1 und 0.2 liegt? **(2 Pkt.)**

Lösung

a)

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} \int f_X(x) dx = c \int_0^1 (x-1)^2 dx \\ &= c \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= c \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 \\ &= c \frac{1}{3} \Rightarrow c = 3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int x f_X(x) dx = 3 \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx \\ &= 3 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= 3 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = 3 \left(\frac{3}{12} - \frac{8}{12} + \frac{6}{12} \right) \\ &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int x^2 f_X(x) dx = 3 \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx \\ &= 3 \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= 3 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{10} \\ \Rightarrow \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{4} \right)^2 = 0.0375 = \frac{3}{80} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_0^x f_X(y) dy \\&= 3 \int_0^x (y-1)^2 dy \\&= 3 \left[\frac{1}{3} y^3 - y^2 + y \right]_0^x \\&= (x^3 - 3x^2 + 3x) \text{ also} \\F_X(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^3 - 3x^2 + 3x & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

d) und e)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 0.2) &= F_X(0.2) \\&= 0.2(0.2^2 - 3 \cdot 0.2 + 3) = 0.488 \\ \mathbb{P}(X \leq 0.1) &= F_X(0.1) \\&= 0.1(0.1^2 - 3 \cdot 0.1 + 3) = 0.271 \\ \mathbb{P}(0.1 \leq X \leq 0.2) &= F_X(0.2) - F_X(0.1) = 0.217\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sei X eine auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x) = I_{(0,1)}(x)$.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte von $Y = -2 \log(X)$. (6 Pkt.)
- Welcher Verteilung folgt Y ? (1 Pkt.)

Lösung

$$f_X(x) = I_{(0,1)}(x)$$

$$y = g(x) = -2 \log(x)$$

Transformationssatz für Dichten (Satz 8.5)

$$y = -2 \log(x)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{y}{2} = \log(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp\left(-\frac{y}{2}\right) =: h(y)$$

$$\frac{\partial h(y)}{\partial y} = \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_Y(y) &= f_X(h(y)) \cdot \left| \frac{\partial h(y)}{\partial y} \right| \\ &= f_X\left(\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\right) \cdot \left| -\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \right| \\ &= I_{(0,1)}\left(\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\right) \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) & 0 < y < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y \sim \chi_2^2 = \text{Exp}(1/2).$$

Aufgabe 4

X und Y seien unkorrelierte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Korrelation der Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ in Abhängigkeit der Varianzen $\mathbb{V}(X)$ und $\mathbb{V}(Y)$. (6 Pkt.)

Lösung

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X + Y, X - Y) &= \mathbb{E}((X + Y)(X - Y)) - \mathbb{E}(X + Y)\mathbb{E}(X - Y) \\
 &= \mathbb{E}(X^2 - \underbrace{XY + XY}_{=0} - Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)) \\
 &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X)^2 - \underbrace{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)}_{=0} - \mathbb{E}(Y)^2) \\
 &= \underbrace{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}_{\mathbb{V}(X)} - \underbrace{(\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2)}_{\mathbb{V}(Y)} \\
 &= \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)
 \end{aligned}$$

Weiterhin:

$$\mathbb{V}(X + Y) \stackrel{\text{stü}}{=} \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

$$\mathbb{V}(X - Y) \stackrel{\text{stü}}{=} \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \rho_{X+Y, X-Y} &= \frac{\text{Cov}(X + Y, X - Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X + Y)\mathbb{V}(X - Y)}} \\
 &= \frac{\mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)}{\sqrt{(\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y))^2}} = \frac{\mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)}{\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Es seien X_1, \dots, X_n unabhängig identisch verteilt mit $X_i \sim \chi_2^2$ (χ^2 -Verteilung mit zwei Freiheitsgraden). Zeigen Sie, daß

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{X_i}{2}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2}.$$

(4 Pkt.)

Lösung

Erste Möglichkeit:

$\exp\left(-\frac{X_i}{2}\right) = h(X_i) \sim U[0, 1]$ nach Aufgabe 3 und somit ist $\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{X_i}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$ und die Behauptung folgt mit dem Gesetz der großen Zahlen.

Zweite Möglichkeit:

Die Dichte der χ_2^2 -Verteilung ist $f_{X_i}(x) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$ und damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{X_i}{2}\right)\right) &= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-x) dx \\ &= \frac{1}{2} [\exp(-x)]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mit dem Gesetz der großen Zahlen folgt nun:

$$\frac{1}{n} \sum \exp\left(-\frac{x_i}{2}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2}$$

